

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

---

**Задача 1.**

**В-1** Для скольких натуральных  $n$  из отрезка  $[22, 2022]$  число  $n^n$  будет полным квадратом?

**Ответ:** 1021

**Решение.** Если  $n = 2k$ , то  $n^n = (2k)^{2k} = ((2k)^k)^2$ , то есть годится любое чётное  $n$ . Их будет 1001 штука. Если  $n$  нечётное, то  $n^n$  будет полным квадратом только в том случае, когда само  $n$  — полный квадрат. Это числа  $5^2, 7^2, 9^2, \dots$ , и всего их будет 20 штук. Ответ:  $1001+20=1021$ .

---

**В-2** Для скольких натуральных  $n$  из отрезка  $[23, 2023]$  число  $n^n$  будет полным квадратом?

**Ответ:** 1020

---

**В-3** Для скольких натуральных  $n$  из отрезка  $[2, 2022]$  число  $n^n$  будет полным квадратом?

**Ответ:** 1032

---

**В-4** Для скольких натуральных  $n$  из отрезка  $[3, 2023]$  число  $n^n$  будет полным квадратом?

**Ответ:** 1031

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

---

**Задача 2.**

**В-1** Дан прямоугольник длины 6 и ширины 4. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

**Ответ:** 50

**Решение.** Решим задачу в общем виде. Пусть квадрат  $ABCD$ , а прямоугольник  $KLMN$ , причём точка  $K$  лежит на  $AB$ ,  $L$  — на  $BC$ ,  $M$  — на  $CD$ ,  $N$  — на  $DA$ ,  $KL = MN = x$ ,  $LM = KN = y \neq x$ . Тогда  $\angle LMC = 90^\circ - \angle NMD = \angle MND = 90^\circ - \angle KNA = \angle KAN$ , т.е. в прямоугольных треугольниках  $LMC$ ,  $NMD$ ,  $KNA$  есть по равному острому углу, поэтому все они подобны. Пусть  $a = AN$ ,  $b = AK$ , тогда из подобия  $\frac{ND}{AK} = \frac{MD}{AN} = \frac{NM}{KN} = \frac{x}{y}$ ,  $ND = \frac{x}{y}b$ ,  $MD = \frac{x}{y}a$ ,  $\frac{CM}{AK} = \frac{LM}{KN} = 1$ ,  $CM = AK = b$ , получим  $AD = AN + ND = a + \frac{x}{y}b$ ,  $CD = CM + MD = b + \frac{x}{y}a$ ,  $AD = CD$ ,  $a + \frac{x}{y}b = b + \frac{x}{y}a$ ,  $\left(\frac{x}{y} - 1\right)(b - a) = 1$ ,  $\frac{x}{y} \neq 1$ , т.к.  $x \neq y$ , тогда  $b = a$ ,  $AN = AK$ , треугольник  $KAN$  равнобедренный прямоугольный, по теореме Пифагора  $AN^2 + AK^2 = KN^2$ ,  $2a^2 = y^2$ ,  $a = \frac{y}{\sqrt{2}}$ ,  $b = a$ . Площадь квадрата  $S = AD^2 = \left(a + \frac{x}{y}a\right)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \frac{x+y}{y}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(6+4)^2}{2} = 50$ .

---

**В-2** Дан прямоугольник длины 8 и ширины 6. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

**Ответ:** 98

---

**В-3** Дан прямоугольник длины 10 и ширины 8. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

**Ответ:** 162

---

**В-4** Дан прямоугольник длины 12 и ширины 10. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Найти площадь квадрата.

**Ответ:** 242

---

**Задача 3.**

**В-1** Найдите количество троек натуральных чисел  $(a, b, c)$ , таких, что  $a, b, c \in [1, 13]$ , и  $a < b$ ,  $a < c$ . Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  мы считаем разными.

**Ответ:** 650

**Решение.** Решим задачу в общем виде, когда  $a, b, c \in [1, n]$ .

Если  $a = 1$ , то  $b$  может принять  $(n - 1)$  значение, и  $c$  может принять  $(n - 1)$  значение. Всего  $(n - 1)^2$  вариантов. Если  $a = 2$ , то  $b$  может принять  $(n - 2)$  значений, и  $c$  может принять  $(n - 2)$  значений. Всего  $(n - 2)^2$  вариантов. Аналогично для последующих значений  $a$ : если  $a = k$ , то  $b$  и  $c$  могут принять по  $(n - k)$  значений, всего  $(n - k)^2$  вариантов. Когда  $a = n - 1$ , то для  $b$  и  $c$  остаётся по одному варианту, а когда  $a = n$ , то вариантов нет.

Таким образом, общее число вариантов равно

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6}.$$

---

**В-2** Найдите количество троек натуральных чисел  $(a, b, c)$ , таких, что  $a, b, c \in [1, 14]$ , и  $a < b$ ,  $a < c$ . Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  мы считаем разными.

**Ответ:** 819

---

**В-3** Найдите количество троек натуральных чисел  $(a, b, c)$ , таких, что  $a, b, c \in [1, 15]$ , и  $a < b$ ,  $a < c$ . Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  мы считаем разными.

**Ответ:** 1015

---

**В-4** Найдите количество троек натуральных чисел  $(a, b, c)$ , таких, что  $a, b, c \in [1, 12]$ , и  $a < b$ ,  $a < c$ . Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  мы считаем разными.

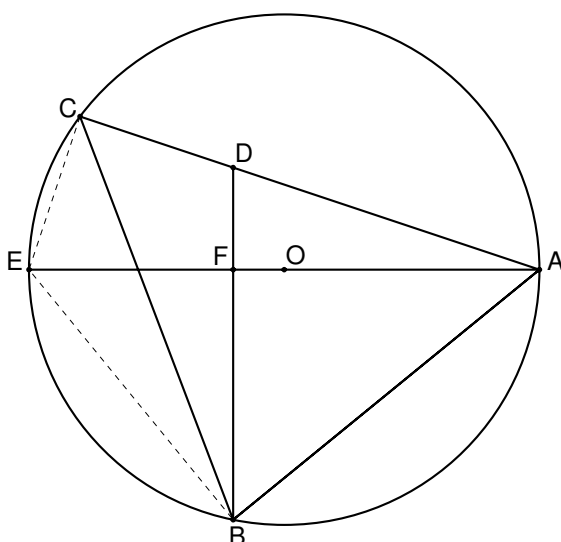
**Ответ:** 506

---

**Задача 4.**

**В-1** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 84$ ,  $AC = 98$ , точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , а прямая  $BD$  перпендикулярна  $AO$  и пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

**Ответ:** 26



**Решение.**

Решим задачу в общем виде: пусть  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $AB < AC$ . Пусть  $AE$  — диаметр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle ABE = 90^\circ$ ,  $\triangle ABE$  подобен  $\triangle BFA$ ,  $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$ , значит,  $AE \cdot AF = c^2$ . Далее,  $\triangle AEC$  подобен  $\triangle AFD$ ,  $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF}$ , значит,  $AD = \frac{AE \cdot AF}{AC} = \frac{c^2}{b}$ . Тогда  $CD = AC - AD = b - \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - c^2}{b}$ . **Ответ:**  $CD = \frac{b^2 - c^2}{b}$ .

**В-2** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 42$ ,  $AC = 49$ , точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , а прямая  $BD$  перпендикулярна  $AO$  и пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

**Ответ:** 13

**В-3** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 168$ ,  $AC = 196$ , точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , а прямая  $BD$  перпендикулярна  $AO$  и пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

**Ответ:** 52

**В-4** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 35$ ,  $AC = 49$ , точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , а прямая  $BD$  перпендикулярна  $AO$  и пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

**Ответ:** 24

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

---

**Задача 5.**

**В-1** Найти все значения  $a$ , для которых при любом  $x, y$  многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее  $a$ , округлённое до сотых.

**Ответ:** 3

**Решение.** Рассмотрим неравенство

$$x^4y^2 + x^2y^4 - ax^2y^2 + 1 \geq 0.$$

При  $xy = 0$  оно выполнено:  $1 \geq 0$ . При  $xy \neq 0$  можно разделить обе части неравенства на  $x^2y^2$ :

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq a.$$

По неравенству о средних

$$\frac{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 1 \implies x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq 3.$$

Значит, заведомо подходят все значения  $a \leq 3$ , и только они: при  $x = y = 1$  неравенство выполняется только при  $a \leq 3$ . Поэтому наибольшее подходящее значение  $a$  равно 3.

---

**В-2** Найти все значения  $a$ , для которых при любом  $x, y$  многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 + ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наименьшее  $a$ , округлённое до сотых.

**Ответ:** -3

---

**В-3** Найти все значения  $a$ , для которых при любом  $x, y$  многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - a^2x^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее  $a$ , округлённое до сотых.

**Ответ:** 1.73

---

**В-4** Найти все значения  $a$ , для которых при любом  $x, y$  многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 4ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее  $a$ , округлённое до сотых.

**Ответ:** 0.75

---

### Задача 6.

В-1

	1	2	3	4	5	6
1	2	2	2	2	1	0
2	2					1
3	3					1
4	3					1
5	3					1
6	1	2	2	2	1	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде:  $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$ , где  $X_i, Y_i$  — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфеты, причём либо  $X_i < X_{i+1}$ , либо  $X_i = X_{i+1}$  и  $Y_i < Y_{i+1}$ .

**Ответ:** 3234452

**Решение.** Условимся называть клетку  $XY$ , если она находится на пересечении строки с номером  $X$  и столбца с номером  $Y$ ; условимся называть прямоугольник  $ABCD$ , если его левая нижняя клетка —  $AB$ , а правая верхняя —  $CD$ . Из значений клеток 31 и 36 получаем, что всего 4 конфеты: три в прямоугольнике 5223 и одна в прямоугольнике 5425. Из значения клетки 16 получаем, что в квадрате 3425 конфет нет. Тогда из значения клетки 26 получаем, что в прямоугольнике 4445 ровно 1 конфеты, а, значит, в прямоугольнике 5455 конфет нет. Из значения клетки 61 получаем, что в прямоугольнике 5243 ровно 1 конфета, из значения клетки 62 — что в прямоугольнике 5244 ровно две конфеты. Значит, одна из конфет находится в клетке 44, а в клетке 45 пусто. Из значения клетки 51 получаем, что в прямоугольнике 5232 ровно три конфеты, так как больше конфет нет, то в прямоугольнике 2223 пусто. Но из значения клетки 11 получаем, что в прямоугольнике 3233 ровно 2 конфеты, а значит одна конфета в клетке 32, вторая — в клетке 33. Осталась одна конфета, из значений клеток 65 и 21 получаем, что она может быть только в клетке 52. Ответ: четыре конфеты в клетках 32, 33, 44 и 52.

	1	2	3	4	5	6
1	2	2	2	2	1	0
2	2					1
3	3	*	*			1
4	3			*		1
5	3	*				1
6	1	2	2	2	1	1

Ниже — ответы для других вариантов:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	3	3	1
2	2		*	*		2
3	2		*			2
4	2			*		2
5	1					1
6	0	1	1	1	1	1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0					2
3	2			*		2
4	2				*	2
5	2	*	*			2
6	2	2	3	3	2	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	2	2	1
2	2			*		2
3	2		*			2
4	2	*			*	2
5	2					1
6	1	1	2	2	1	1

В-2

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	3	3	1
2	2					2
3	2					2
4	2					2
5	1					1
6	0	1	1	1	1	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде:  $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$ , где  $X_i, Y_i$  — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфету, причём либо  $X_i < X_{i+1}$ , либо  $X_i = X_{i+1}$  и  $Y_i < Y_{i+1}$ .

Ответ: 23243344

Решение.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	3	3	3	1
2	2		*	*		2
3	2		*			2
4	2			*		2
5	1					1
6	0	1	1	1	1	1

Условимся называть клетку  $XY$ , если она находится на пересечении строки с номером  $X$  и столбца с номером  $Y$ ; условимся называть прямоугольник  $ABCD$ , если его левая нижняя клетка —  $AB$ , а правая верхняя —  $CD$ . Из значений клеток 16 и 15 получаем, что в прямоугольнике 3323 есть две конфеты, значит, есть по конфете в клетках 33 и 23. Также из значения клетки 16 получаем, что в квадрате 3425 одна конфета. Из значения клетки 11 получаем, что в прямоугольнике 3222 нет конфет. Из значения клетки 12 получаем, что в прямоугольнике 3424 одна конфета, следовательно, в прямоугольнике 3525 нет конфет. Из значений клеток 46 и 56 получаем, что в прямоугольнике 2425 одна конфета. В клетке 25 нет конфет, следовательно, она есть в клетке 24; таким образом, мы нашли все 3 конфеты в прямоугольнике 3225. Из значений клеток 16 и 26 получаем, что в прямоугольнике 4445 одна конфета. Из значения клетки 66 получаем, что в прямоугольнике 5455 нет конфет. Из значения клеток 61 и 62 получаем, что

в прямоугольнике 5444 одна конфета. В клетке 54 конфеты нет, следовательно, в клетке 44 есть конфеты. Из значения клетки 61 получаем, что в квадрате 5243 нет конфет. Итак, конфеты есть в клетках 23, 24, 33 и 44.

В-3

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0					2
3	2					2
4	2					2
5	2					2
6	2	2	3	3	2	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде:  $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$ , где  $X_i, Y_i$  — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфету, причём либо  $X_i < X_{i+1}$ , либо  $X_i = X_{i+1}$  и  $Y_i < Y_{i+1}$ .

Ответ: 34455253

В-4

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	2	2	1
2	2					2
3	2					2
4	2					2
5	2					1
6	1	1	2	2	1	1

На плоскости имеются белые и жёлтые клетки. Каждая белая клетка либо скрывает конфету, либо пустая. В жёлтой клетке записано число конфет, которые скрываются за белыми клетками, удалёнными от данной не дальше, чем на 2 строки и 2 столбца. Из клеток составлен квадрат (см. рисунок), красным подписаны строки и столбцы. Какие клетки содержат конфеты? Ответ запишите в виде:  $X_1Y_1X_2Y_2 \dots X_nY_n$ , где  $X_i, Y_i$  — соответственно строка и столбец клетки, содержащей конфету, причём либо  $X_i < X_{i+1}$ , либо  $X_i = X_{i+1}$  и  $Y_i < Y_{i+1}$ .

Ответ: 24334245



**Задача 7.**

**В-1** Есть квадратный трёхчлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами. Про него известно следующее:  $f(1) = 0$ ,  $60 < f(8) < 70$ ,  $80 < f(9) < 90$ . Чему равно  $f(10)$ ?

**Ответ:** 117

**Решение.** Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$f(1) = a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b.$$

$$f(8) = 64a + 8b + c \in (60, 70) \Rightarrow 63a + 7b \in (60, 70) \Rightarrow 9a + b \in \left(8\frac{4}{7}, 10\right) \Rightarrow 9a + b = 9.$$

$$f(9) = 81a + 9b + c \in (80, 90) \Rightarrow 80a + 8b \in (80, 90) \Rightarrow 10a + b \in \left(10, 11\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 10a + b = 11.$$

Отсюда  $a = 2$ ,  $b = -9$ ,  $c = 7$  и  $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$ ,  $f(10) = 117$ .

---

**В-2** Есть квадратный трёхчлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами. Про него известно следующее:  $f(1) = 0$ ,  $60 < f(7) < 70$ ,  $80 < f(8) < 90$ . Чему равно  $f(9)$ ?

**Ответ:** 104

---

**В-3** Есть квадратный трёхчлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами. Про него известно следующее:  $f(1) = 0$ ,  $50 < f(8) < 60$ ,  $70 < f(9) < 80$ . Чему равно  $f(10)$ ?

**Ответ:** 90

---

**В-4** Есть квадратный трёхчлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами. Про него известно следующее:  $f(1) = 0$ ,  $50 < f(7) < 60$ ,  $80 < f(8) < 90$ . Чему равно  $f(9)$ ?

**Ответ:** 120

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 9 класса

---

**Задача 8.**

**В-1** Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{6(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+4\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать  $x$ , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 0.16 ( $x = 4/25$ ,  $y = z = 1/25$ )

**Решение.** Решим задачу в общем виде:

$$\begin{cases} \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)} = a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}, \\ x+y+A\sqrt{z} = 1, \end{cases}$$

где  $a, b, c, A$  — положительные числа. По неравенству Коши-Буняковского

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x+y+z} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)},$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, когда  $\frac{\sqrt{x}}{a} = \frac{\sqrt{y}}{b} = \frac{\sqrt{z}}{c}$ , откуда  $y = \frac{b^2}{a^2}x$ ,  $z = \frac{c^2}{a^2}x$ . Подставляя эти выражения во второе уравнение, получаем

$$(a^2+b^2)x + Aac\sqrt{x} - a^2 = 0,$$

откуда  $\sqrt{x} = \frac{-Aac + a\sqrt{A^2c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$ ,  $\sqrt{y} = \frac{-Abc + b\sqrt{A^2c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$ ,  $\sqrt{z} = \frac{-Ac^2 + c\sqrt{A^2c^2 + 4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$  (из двух возможных значений для  $\sqrt{x}$  выбирается положительное). В нашем случае  $a = 2$ ,  $b = c = 1$ ,  $A = 4$ , откуда находим  $x = 4/25$ ,  $y = z = 1/25$ .

---

**В-2** Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{6(x+y+z)} = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+4\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать  $x$ , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 0.04 ( $x = z = 1/25$ ,  $y = 4/25$ )

---

**В-3** Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{9(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+7\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать  $x$ , при необходимости, округлив ответ до трех знаков после запятой.

**Ответ:** 0.063 ( $x = y = 1/16$ ,  $z = 1/64$ )

---

**В-4** Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{250(x+y+z)} = 5\sqrt{x} + 12\sqrt{y} + 9\sqrt{z}, \\ x+y+3\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать  $x$ , при необходимости, округлив ответ до трех знаков после запятой.

**Ответ:** 0.071 ( $x = 16/225$ ,  $y = 256/5625$ ,  $z = 16/225$ )

---