

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 1.

В-1 Для скольких натуральных n из отрезка $[22, 2022]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1021

Решение. Если $n = 2k$, то $n^n = (2k)^{2k} = ((2k)^k)^2$, то есть годится любое чётное n . Их будет 1001 штука. Если n нечётное, то n^n будет полным квадратом только в том случае, когда само n — полный квадрат. Это числа $5^2, 7^2, 9^2, \dots$, и всего их будет 20 штук. Ответ: $1001+20=1021$.

В-2 Для скольких натуральных n из отрезка $[23, 2023]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1020

В-3 Для скольких натуральных n из отрезка $[2, 2022]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1032

В-4 Для скольких натуральных n из отрезка $[3, 2023]$ число n^n будет полным квадратом?

Ответ: 1031

Задача 2.

В-1 У каждого ученика в классе не менее 15 друзей, причем не более 15 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 17

Решение. Нарисуем граф: ученики — это точки, ребро — дружба между учениками. Так как у каждого не менее 15 друзей, то всего учеников хотя бы 16. Ровно 16 учеников быть не может, так как тогда все вершины будут соединены со всеми, и у всех 16 учеников будет поровну друзей, что противоречит условию. Значит, учеников хотя бы 17. Пример для 17 — 17 вершин, где каждая соединена с каждой, но одного ребра нет (получается 15 учеников с 16 друзьями у каждого и 2 — с 15-ю).

В-2 У каждого ученика в классе не менее 16 друзей, причем не более 16 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 18

В-3 У каждого ученика в классе не менее 17 друзей, причем не более 17 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 19

В-4 У каждого ученика в классе не менее 18 друзей, причем не более 18 учеников имеют одинаковое число друзей. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Ответ: 20

Задача 3.

В-1 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведены 2022 прямые?

Ответ: 2045254

Решение. Будем проводить прямые по очереди. Проводим каждую новую прямую так, чтобы она пересекала все старые, и так, чтобы не было пересечений трёх (и более) прямых в одной точке. Тогда k -я прямая пересечёт $k - 1$ прямую (каждую из предыдущих) — значит, она пройдёт через k губерний, и каждая затронутая губерния будет поделена на две части. Отсюда получаем рекуррентную формулу для числа губерний $N(k)$ при k проведённых прямых: $N(0) = 1$, $N(k) = N(k-1) + k = N(k-2) + k - 1 + k = \dots = k + k - 1 + k - 2 + \dots + 2 + 1 + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + 1$.

В-2 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведены 2023 прямые?

Ответ: 2047277

В-3 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведены 2024 прямые?

Ответ: 2049301

В-4 Карта Флатландии — прямоугольник, разбитый на губернии прямыми. Какое наибольшее число губерний может быть на карте, если проведено 2025 прямых?

Ответ: 2051326

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 4.

В-1 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 13]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 650

Решение. Решим задачу в общем виде, когда $a, b, c \in [1, n]$.

Если $a = 1$, то b может принять $(n - 1)$ значение, и c может принять $(n - 1)$ значение. Всего $(n - 1)^2$ вариантов. Если $a = 2$, то b может принять $(n - 2)$ значений, и c может принять $(n - 2)$ значений. Всего $(n - 2)^2$ вариантов. Аналогично для последующих значений a : если $a = k$, то b и c могут принять по $(n - k)$ значений, всего $(n - k)^2$ вариантов. Когда $a = n - 1$, то для b и c остаётся по одному варианту, а когда $a = n$, то вариантов нет.

Таким образом, общее число вариантов равно

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6}.$$

В-2 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 14]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 819

В-3 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 15]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 1015

В-4 Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) , таких, что $a, b, c \in [1, 12]$, и $a < b$, $a < c$. Порядок чисел в тройке важен — то есть, например, тройки $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ мы считаем разными.

Ответ: 506

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 5.

В-1 Дан прямоугольник длины 6 и ширины 4. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 50

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть квадрат $ABCD$, а прямоугольник $KLMN$, причём точка K лежит на AB , L — на BC , M — на CD , N — на DA , $KL = MN = x$, $LM = KN = y$. Из того, что $\angle NKA = \angle KNA = \angle MND = \angle NMD = 45^\circ$, получаем равенство треугольников KAN, NMD , в них $AK = AN, ND = MD$, по теореме Пифагора в них $AK^2 + AN^2 = KN^2, ND^2 + MD^2 = NM^2$, тогда $2AN^2 = y^2, 2ND^2 = x^2$, $AN = \frac{y}{\sqrt{2}}$, $ND = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $AD = AN + ND = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, а площадь квадрата $S = AD^2 = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(6+4)^2}{2} = 50$. Отметим, что стороны прямоугольника, вписанного в квадрат, всегда образуют со сторонами этого квадрата углы по 45° — это условие задачи избыточно и дано только для упрощения рассуждений.

В-2 Дан прямоугольник длины 8 и ширины 6. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 98

В-3 Дан прямоугольник длины 10 и ширины 8. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 162

В-4 Дан прямоугольник длины 6 и ширины 4. Вокруг него описан квадрат, т.е. нарисован квадрат такой, что разные вершины прямоугольника лежат на разных сторонах квадрата. Стороны прямоугольника образуют углы по 45° со сторонами квадрата. Найти площадь квадрата.

Ответ: 242

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 7-8 классов

Задача 6.

В-1 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 22 ноября 2021 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 20

Решение. С полудня 23 сентября до полудня 31 декабря года рождения космонавта прошло 99 суток. Пусть с полудня 31 декабря года рождения космонавта до полудня 31 декабря года, предшествовавшего первому високосному году в жизни космонавта прошло x лет ($0 \leq x \leq 3$), то есть $365x$ суток, а с полудня 31 декабря года, предшествовавшего первому високосному году в жизни космонавта до полудня 31 декабря 2019 года прошло $1461y$ суток (то есть y блоков по 4 года, где в каждом блоке первый год — високосный). Далее, с полудня 31 декабря 2019 года до полудня 22 ноября 2021 года прошло ещё $366+326$ суток.

Всего к полудню 22 ноября 2021 года космонавт прожил $99 + 365x + 1461y + 366 + 326$ суток, что оказалось кратно 1000; пусть это число суток равно $1000n$. Тогда $365x + 1461y = 1000n - 791$. Рассмотрим 4 случая.

Если $x = 0$, то $1461y = 1000(n - 1) + 209$; тогда число y должно оканчиваться на 9. При $y = 9$ и $y = 19$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 29$ возраст космонавта будет больше 100 лет. Если $x = 1$, то $1461y = 1000(n - 2) + 844$; тогда число y должно оканчиваться на 4. При $y = 4$ получаем $n = 7$. При $y = 14$ и $y = 24$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 34$ возраст космонавта будет больше 100 лет.

Если $x = 2$, то $1461y = 1000(n - 2) + 479$; тогда число y должно оканчиваться на 9. При $y = 9$ и $y = 19$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 29$ возраст космонавта будет больше 100 лет. Если $x = 3$, то $1461y = 1000(n - 2) + 114$; тогда число y должно оканчиваться на 4. При $y = 4$, $y = 14$ и $y = 24$ число n оказывается нецелым, а при $y \geq 34$ возраст космонавта будет больше 100 лет.

Таким образом, единственно возможный случай: $x = 1$, $y = 4$, $n = 7$, и космонавту на 26 ноября 2022 года в этом случае будет 20 полных лет (и ещё некоторое количество дней).

В-2 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 1 июня 2020 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 16

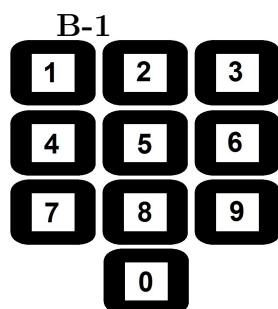
В-3 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 18 августа 2020 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 24

В-4 Космонавт, прилетевший на другую планету, узнал, что инопланетяне на ней измеряют возраст в килоднях (один килодень равен 1000 земных суток). Сколько полных земных лет было космонавту 26 ноября 2022 года, если по земному календарю он родился в полдень по московскому времени 23 сентября (какого-то года), прошлый килодень рождения он отмечал в полдень по московскому времени 8 февраля 2022 года, а его возраст не превышает 100 земных лет? Килодень рождения — это момент, когда с рождения человека проходит целое число тысяч земных суток.

Ответ: 28

Задача 7.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 2?

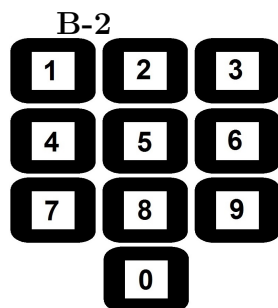
Ответ: 13

Решение. Заметим, что если на третьем месте в пароле стоит 1, то для четвёртой цифры имеется пять вариантов (5, 6, 8, 9, 0), если 2 — то два (6, 9), если 4 — то три (8, 9, 0), если 5 — то один (9), если 7 — то один (0), если какая-то другая цифра — то нет вариантов. Если вторая цифра 4, то третьей может быть только 1, а, значит, вариантов будет пять, если вторая цифра 5, то третьей может быть только 2, а, значит, вариантов будет два, если вторая цифра 7, то третьей может быть 1 или 4, а, значит, вариантов будет $5 + 3 = 8$, если вторая цифра 8, то третьей может быть 2 или 5, а, значит, вариантов будет $2 + 1 = 3$, если вторая цифра 0, то третьей может быть 2, 5 или 8, а, значит, вариантов будет $2 + 1 + 0 = 3$, если вторая цифра какая-то другая, то число вариантов в этом случае в итоге будет равно нулю.

Если первая цифра 2, то второй может быть 4 или 7, а, значит, число вариантов равно $5 + 8 = 13$.

Для второго варианта задачи: если первая цифра 3, то второй может быть 4, 5, 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $5 + 2 + 8 + 3 + 3 = 21$.

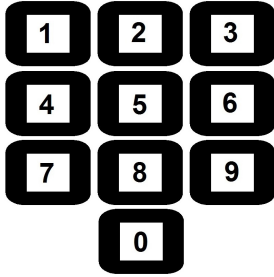
Для третьего варианта задачи: если первая цифра 6, то второй может быть 7, 8 или 0, а, значит, число вариантов равно $8 + 3 + 3 = 14$.



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 3?

Ответ: 21

В-3



Планшет обладает стандартным экраном блокировки (см. рис.). Владелец планшета вводит четырёхзначный пароль, а взломщик наблюдает со стороны. Он не видит точные цифры, которые нажимает владелец, но следит за движением пальца: вторая цифра находится левее и ниже первой, третья цифра находится ровно выше второй (не левее и не правее), последняя, четвёртая — правее и ниже третьей. Сколько комбинаций надо перебрать взломщику, чтобы гарантировано снять пароль с планшета, если известно, что первая цифра пароля 6?

Ответ: 14
