

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

Задача 1.

В-1 В магазине продают три вида ручек: по 14 рублей, по 15 рублей и по 16 рублей. Вася купил ручек ровно на 170 рублей. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 6

Решение. Пусть Вася купил k ручек по 14 рублей, l ручек по 15 рублей и m ручек по 16 рублей. Тогда $14k + 15l + 16m = 170$; для ответа на вопрос задачи нужно найти количество решений этого уравнения в неотрицательных целых числах. Перейдя в уравнении к остаткам от деления на 15, получим, что $m = k + 5 + 15s$, где s — некоторое целое число. Подставив это выражение в исходное уравнение и поделив обе его части на 15, получим $2k + l + 16s = 6$. Так как $2k + l \geq 0$, то $s \leq 0$; если $s \leq -2$, то $2k + l \geq 6 + 32 = 38$ и $170 = 14k + 15l + 16m \geq 14k + 7l \geq 7 \cdot 38 > 170$ — противоречие, следовательно, $s = 0$ или $s = -1$. При $s = 0$ получаем $k = 0$ и $l = 6$, $k = 1$ и $l = 4$, $k = 2$ и $l = 2$, $k = 3$ и $l = 0$, при этом $m = k + 5$ равно 5, 6, 7, 8 соответственно. При $s = -1$ имеем $m = k + 5 - 15 = k - 10 \geq 0$, значит, $2k \geq 20$ и $22 = 22 + 0 = 20 + 2$, получаем $k = 11$ и $l = 0$, $k = 10$ и $l = 2$, при этом m равно 1 и 0 соответственно. Итого 6 вариантов.

В-2 В магазине продают три вида ручек: по 15 рублей, по 16 рублей и по 17 рублей. Вася купил ручек ровно на 180 рублей. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 5

В-3 В магазине продают три вида ручек: по 16 рублей, по 17 рублей и по 18 рублей. Вася купил ручек ровно на 193 рубля. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 4

В-4 В магазине продают три вида ручек: по 13 рублей, по 14 рублей и по 15 рублей. Вася купил ручек ровно на 160 рублей. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ: 6

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

Задача 2.

В-1 Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 8 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 648

Решение. Пусть даны числа $x \leq y$. По условию $y = (y - x)^2$, откуда $y = n^2$ и $x = n^2 - n$, где n — некоторое натуральное число. Поскольку $\text{НОД}(n^2, n^2 - n) = \text{НОД}(n^2, n) = n$, из второго условия задачи получим $x = 8n \Rightarrow n^2 - n = 8n \Rightarrow n = 9$. Значит, $x = 72, y = 81$, $\text{НОК}(72, 81) = 648$.

В-2

Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 7 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 448

В-3

Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 6 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 294

В-4 Даны два натуральных числа. Большее из них равно квадрату их разности, а меньшее из них в 9 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите наименьшее общее кратное этих двух чисел.

Ответ: 900

Задача 3.

В-1 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 6

Решение. Левая часть первого уравнения раскладывается на множители:

$$(2x - y)(x - 2y) = 0.$$

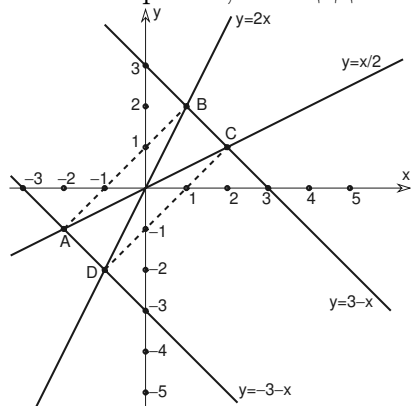
Во втором уравнении после переноса всех слагаемых в левую часть также можно разложить левую часть на множители:

$$x^2 + y^2 = 9 - 2xy \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 9 \Rightarrow (x + y)^2 = 3^2 \Rightarrow (x + y - 3)(x + y + 3) = 0$$

Таким образом, решениями системы будут координаты точек A, B, C, D пересечения графиков соответствующих линейных функций (см. рисунок). Четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник, так как его стороны лежат на взаимно перпендикулярных прямых. Длины сторон легко определяются по теореме Пифагора:

$$AD = BC = \sqrt{2}, \quad AB = CD = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь четырёхугольника равна $S_{ABCD} = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$.



В-2 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x^2 - 26xy + 5y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 12

В-3 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 30

В-4 Найти площадь выпуклого многоугольника, координаты вершин которого суть решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4 - 2xy. \end{cases}$$

Ответ: 4

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

Задача 4.

В-1 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 50 золотых червонцев. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 2600

Решение. Ответ на вопрос задачи равен количеству решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ в положительных нечётных числах.

Пусть $x_i = 2y_i - 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда все y_i — натуральные числа, и уравнение приобретает вид $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 27$. Количество решений этого уравнения в натуральных числах равно числу способов расставить в ряду из 27 шариков 3 перегородки (перегородки можно ставить только между двумя шариками, нельзя ставить две перегородки рядом): число y_1 будет равно количеству шариков левее первой перегородки, y_2 — между первой и второй, y_3 — между второй и третьей, y_4 — правее третьей перегородки. А число способов расстановки перегородок равно $C_{26}^3 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{2 \cdot 3} = 2600$.

В-2 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 52 золотых червонца. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 2925

В-3 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 54 золотых червонца. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 3276

В-4 Четыре купца Арсений, Богдан, Вакула и Гаврила получили из казны 56 золотых червонцев. Они их решили разделить так, чтобы каждому досталось нечётное количество червонцев. Сколько есть разных способов дележа?

Ответ: 3654

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

Задача 5.

В-1 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее a , округлённое до сотых.

Ответ: 3

Решение. Рассмотрим неравенство

$$x^4y^2 + x^2y^4 - ax^2y^2 + 1 \geq 0.$$

При $xy = 0$ оно выполнено: $1 \geq 0$. При $xy \neq 0$ можно разделить обе части неравенства на x^2y^2 :

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq a.$$

По неравенству о средних

$$\frac{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 1 \implies x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq 3.$$

Значит, заведомо подходят все значения $a \leq 3$, и только они: при $x = y = 1$ неравенство выполняется только при $a \leq 3$. Поэтому наибольшее подходящее значение a равно 3.

В-2 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 + ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наименьшее a , округлённое до сотых.

Ответ: -3

В-3 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - a^2x^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее a , округлённое до сотых.

Ответ: 1.73

В-4 Найти все значения a , для которых при любом x, y многочлен

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 4ax^2y^2 + 1$$

неотрицателен. В ответе укажите наибольшее a , округлённое до сотых.

Ответ: 0.75

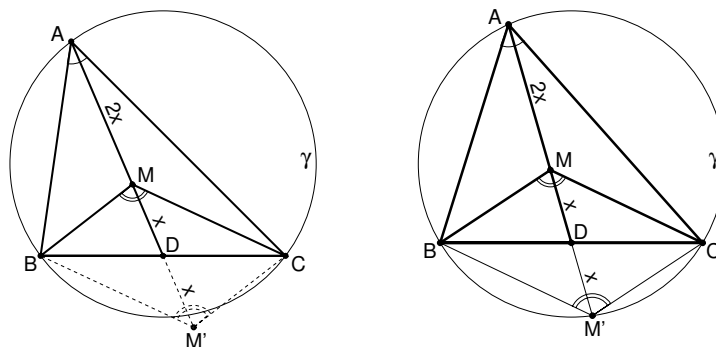
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

Задача 6.

В-1 В треугольнике ABC $\angle BAC = 36^\circ$, $BC = 10\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан, и $\angle BMC = 144^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 15



Решение.

Пусть γ — окружность, описанная около ABC . Пусть точка M' лежит на продолжении медианы AD и $DM' = DM = x > 0$. По свойству медиан треугольника $AM : DM = 2 : 1 \Rightarrow AM = 2x$. Из равенства треугольников $\triangle BDM = \triangle CDM'$ и $\triangle CDM = \triangle BDM' \Rightarrow \triangle BMC = \triangle CM'B \Rightarrow \angle BMC = \angle CM'B = 144^\circ$. Отсюда $\angle BAC + \angle BM'C = 180^\circ$. Значит, по признаку вписанного четырёхугольника точка M' лежит на окружности. Хорды AM' и BC пересекаются в точке D , поэтому по теореме об отрезках пересекающихся хорд имеем

$$AD \cdot DM' = BD \cdot DC \iff 3x \cdot x = AD \cdot DM' = BD \cdot DC = 25 \cdot 3 \iff x = 5.$$

В-2 В треугольнике ABC $\angle BAC = 48^\circ$, $BC = 12\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан, и $\angle BMC = 132^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 18

В-3 В треугольнике ABC $\angle BAC = 18^\circ$, $BC = 14\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан, и $\angle BMC = 162^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 21

В-4 В треугольнике ABC $\angle BAC = 54^\circ$, $BC = 6\sqrt{3}$, M — точка пересечения медиан, и $\angle BMC = 126^\circ$. Найдите длину медианы треугольника ABC , проведённой из вершины A .

Ответ: 9

Задача 7.

В-1 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{6(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+4\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.16 ($x = 4/25$, $y = z = 1/25$)

Решение. Решим задачу в общем виде:

$$\begin{cases} \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)} = a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}, \\ x+y+A\sqrt{z} = 1, \end{cases}$$

где a, b, c, A — положительные числа. По неравенству Коши-Буняковского

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x+y+z} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)},$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $\frac{\sqrt{x}}{a} = \frac{\sqrt{y}}{b} = \frac{\sqrt{z}}{c}$, откуда $y = \frac{b^2}{a^2}x$, $z = \frac{c^2}{a^2}x$. Подставляя эти выражения во второе уравнение, получаем

$$(a^2+b^2)x + Aac\sqrt{x} - a^2 = 0,$$

откуда $\sqrt{x} = \frac{-Aac+a\sqrt{A^2c^2+4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$, $\sqrt{y} = \frac{-Abc+b\sqrt{A^2c^2+4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$, $\sqrt{z} = \frac{-Ac^2+c\sqrt{A^2c^2+4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$ (из двух возможных значений для \sqrt{x} выбирается положительное). В нашем случае $a = 2$, $b = c = 1$, $A = 4$, откуда находим $x = 4/25$, $y = z = 1/25$.

В-2 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{6(x+y+z)} = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+4\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.04 ($x = z = 1/25$, $y = 4/25$)

В-3 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{9(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+7\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.06 ($x = y = 1/16$, $z = 1/64$)

В-4 Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{9(x+y+z)} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+2\sqrt{z} = 1. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшее значение, которое может принимать x , при необходимости, округлив ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.25 ($x = y = 1/4$, $z = 1/16$)

Задача 8.

В-1 Найдите количество натуральных $n < 2023$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 44

Решение. Исходное уравнение равносильно равносильно уравнению

$$x(1 - \sqrt{n})(1 + \sqrt{n}) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{n}).$$

Если $n = 1$, то любое неотрицательное число x будет решением, поэтому $n = 1$ подходит.

Если $n \neq 1$, $x > 0$, получаем уравнение

$$\sqrt{x}(1 + \sqrt{n}) = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{(1 + \sqrt{n})^2} = \frac{1}{1 + n + 2\sqrt{n}}.$$

Значит, x будет рациональным только тогда, когда $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$. Таким образом, в качестве n подходят все точные квадраты натуральных чисел, не превосходящие 2022: $1, 2^2, 3^2, \dots, 44^2$ — итого 44 значения.

В-2 Найдите количество натуральных $n < 2024$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 44

В-3 Найдите количество натуральных $n < 2025$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 44

В-4 Найдите количество натуральных $n < 2026$, при каждом из которых среди корней уравнения $x - \sqrt{x} = nx - \sqrt{nx}$ имеется положительное рациональное число.

Ответ: 45
