

Задача 1.

В-1

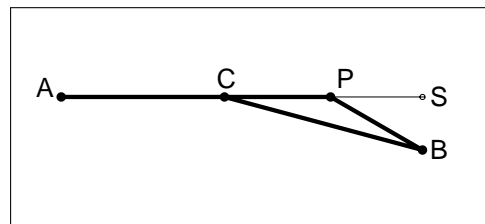
В бескрайних калмыцких степях мама отправила маленькую дочку навестить бабушку. У девочки не было ни навигатора, ни компаса, а только часы, которыми она еще не умела пользоваться, но у которых был ежечасный звуковой сигнал. Зная обычную скорость их любимого верблюда, мама рассчитала маршрут для дочки. Отправляя ее в путь при звуковом сигнале часов в направлении, соответствующем положению солнца в этот момент, велела через час (по очередному сигналу часов) изменить направление движения в соответствии с новым положением солнца. Так в конце концов девочка и доехала бы до бабушки. Но, когда пришло время менять направление, девочка заметила далеко впереди юрту своей подружки, она продолжила движение, не меняя направления, доехала до подружки и проговорила с ней 21 минуту, пока не прозвучал следующий сигнал часов. Тогда она вспомнила наставление матери и продолжила путь в направлении, соответствующем новому положению солнца. Как ни странно, до бабушки она доехала. Сколько всего времени (в минутах) она на это потратила?

Ответ: 159

Решение.

Пусть девочка выехала из точки A в направлении на солнце (S), должна была повернуть в точке C , а юрты подружки и бабушки находятся в точках P и B . Так как солнце за сутки совершает видимый оборот в 360° , то за час направление на солнце меняется на $360^\circ : 24 = 15^\circ$, а за два часа — на 30° , т. е. $\angle BCS = 15^\circ$, $\angle BPS = 30^\circ$.

Из свойства внешнего угла треугольника вытекает, что $\angle CBP = \angle BPS - \angle BCS = 15^\circ$, так что $\triangle CPB$ — равнобедренный и $BP = CP$.



Таким образом, чтобы добраться до бабушки, девочка затратила:

- 1) 1 час на путь AC до нужной точки поворота;
- 2) $60 - 21 = 39$ минут на путь CP до юрты подружки;
- 3) 21 минуту на беседу в точке P ;
- 4) 39 минут на путь PB до бабушки.

Итого, у нее ушло $60 + 39 + 21 + 39 = 159$ минут.

Задача 2.

В-1 Найдите площадь плоской фигуры, границы которой описываются уравнением

$$||y| + ||x| - 4| - 4| = 1.$$

Ответ: 62

Решение.

Будем постепенно раскрывать модули.

1. Пусть $x \geq 0$. Тогда выражение имеет вид

$$||y| + |x - 4| - 4| = 1.$$

1.1. Пусть $x \geq 4$, тогда выражение имеет вид

$$||y| + x - 8| = 1.$$

1.1.1 Так как в функции берется модуль от y , то это означает, что можно начертить график в области $y \geq 0$ и сделать симметрию, относительно оси Ox . Тогда рассмотрим выражение:

$$|y + x - 8| = 1.$$

Рассмотрим, в общем виде, график функции $|ky + x - a| = b$. Раскрывая модуль, мы получим следующее:

1. Если $ky + x - a \geq 0$, то $ky + x - (a + b) = 0$. График — прямая, проходящая через точки $(a + b, 0)$, $\left(0, \frac{a + b}{k}\right)$.

2. Если $ky + x - a < 0$, тогда $-ky - x + a - b = 0$. График — прямая, проходящая через точки $(a - b, 0)$, $\left(0, \frac{a - b}{k}\right)$.

Таким образом в области $y \geq 0$, $x \geq 4$ мы имеем пару параллельных прямых, проходящих через точки $(4, 5) - (9, 0)$ и $(4, 3) - (0, 7)$.

1.2. Пусть $0 \leq x < 4$, тогда выражение имеет вид

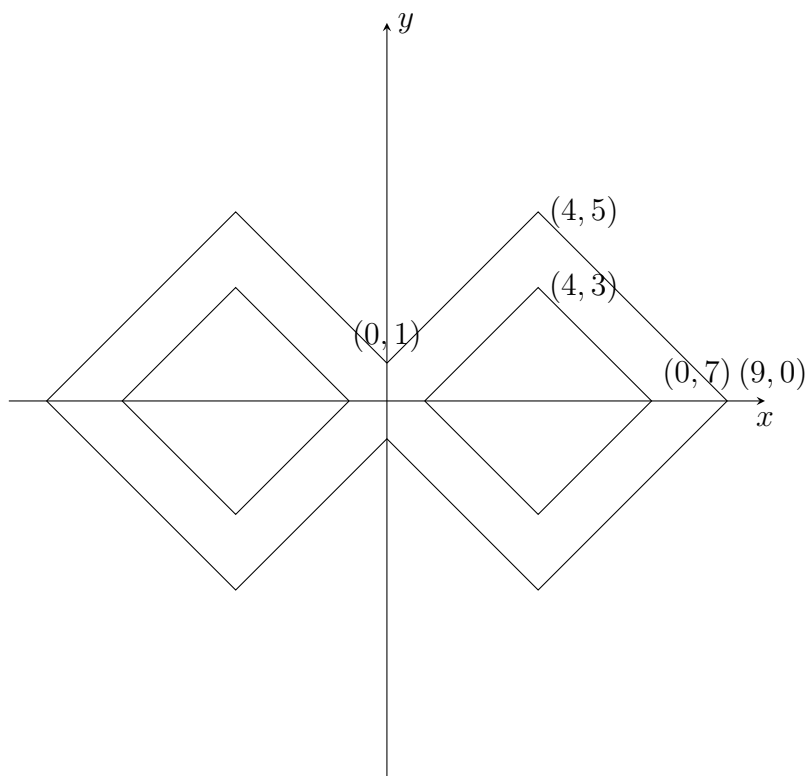
$$||y| - x| = 1.$$

Теперь опять применим свойство модуля $|y|$ и будем исследовать выражение

$$|y - x| = 1.$$

Раскрываем модуль, получим график — две параллельные прямые, проходящие через точки $(4, 5) - (0, 1)$ и $(4, 3) - (1, 0)$.

В области, где $x < 0$, также воспользуемся свойством модуля. График в этой области симметричен относительно оси Oy . Таким образом, получаем следующую фигуру



Теперь посчитаем площадь. Так как фигура симметрична относительно оси Oy , достаточно посчитать площадь правой половины. Удобнее всего увидеть, что это квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ из которого «вырезали» меньший квадрат со стороной $4\sqrt{2}$ и отрезали уголок — равнобедренный прямоугольный треугольник, высота которого к гипотенузе равна 1, а гипотенуза равна 2.

Таким образом, площадь равна:

$$2 \cdot \left((6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right) = 62$$

Задача 3.

В-1 Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

Ответ: 225

Решение. Пусть купили x^2 плиток, в ширину прямоугольной комнаты укладывается y плиток. Тогда верно равенство

$$y(y + 11) = x^2 - 15.$$

Дискриминант квадратного уравнения $y^2 + 11y - x^2 + 15 = 0$ относительно y равен $D = 121 + 4x^2 - 60 = 61 + 4x^2$. Чтобы уравнение имело целое решение, число $61 + 4x^2$ должно быть нечетным квадратом, т.е.

$$61 + 4x^2 = z^2,$$

откуда $(z - 2x)(z + 2x) = 61$. Т.к. 61 — простое число, то $z - 2x = 1$ и $z + 2x = 61$, откуда $z = 31$, $x = 15$.

Задача 4.

В-1 На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на центральном квадратике одной из его граней, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

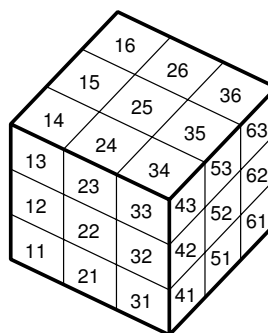
- 1) При 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) При 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Завершил жучок свое движение через 2023 с после его начала. Через сколько секунд после начала движения жучок впервые оказался на том квадратике, на котором он в конце остановился?

Ответ: 2 с

Решение. Для отслеживания движения жучка будем использовать частичную развертку куба, покрывающую 3 грани. Каждый квадратик будем обозначать двузначным числом, 1-я и 2-я цифры которого являются соответствующими координатами центра квадратика на развертке (единица — ширина квадратика):

16	26	36			
15	25	35			
14	24	34			
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61



Взяв в качестве отправного квадратик 22, а в качестве первого перемещения — $22 \rightarrow 23$, запишем маршрут за первые 29 с:

Время (с)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Квадратик	22	23	24	34	43	33	23	24	25	35	53	43	33	34	35
Время (с)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Квадратик	53	52	42	32	33	34	43	42	32	22	23	24	34	43	33

Как видим, через 24 с жучок окажется в исходной точке, будет двигаться в том же направлении (на квадратик 23), причем четность 0 и 24 совпадают. Поэтому дальнейшее движение жучка будет периодически повторять движение первых 24 с. Так как $2023 \equiv 7 \pmod{24}$ (остаток от деления 2023 на 24 равен 7), то через 2023 с жучок окажется на том же квадратике, на котором он был через 7 с после начала движения, т. е. на квадратике 24. Как следует из таблицы, впервые на этом квадратике жучок оказался через 2 с после начала движения.

Задача 5.

В-1 Пловец решил переплыть реку. Сначала он взял направление перпендикулярно течению — и течение снесло его на 12 метров. Оттуда он решил вернуться туда, откуда начал — он взял направление на точку, из которой началось плавание, и теперь течение снесло его на 20 метров от желаемой точки. Найдите ширину реки.

Ответ: 9

Решение. Пусть h — ширина реки, а $a = 12$ и $b = 20$ — заданные в условии отосы.

При первом заплыве вектор абсолютной скорости пловца был равен сумме продольной составляющей (скорости течения) и поперечной составляющей, модуль которой равен собственной скорости пловца в стоячей воде. Так как за время, за которое пловец переплыл реку, он переместился на h в поперечном направлении и на a в продольном, отношение его собственной скорости к скорости течения равно h/a .

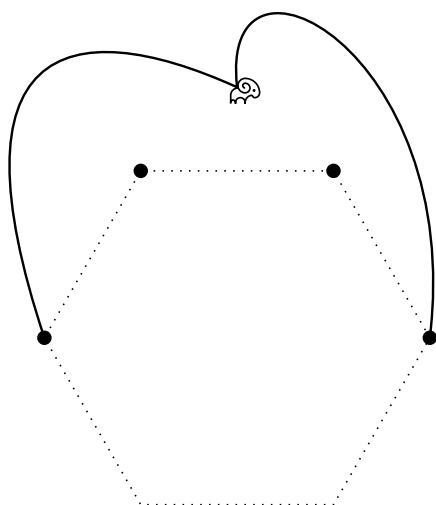
Во время второго заплыва вектор абсолютной скорости был равен сумме всё той же продольной составляющей (скорости течения) и наклонной составляющей, направленной от точки второго старта к желаемой точке финиша и равной по модулю собственной скорости пловца. Умножая векторы скорости на время второго заплыва, получим два вектора перемещения: желаемый (длиной $\sqrt{a^2 + h^2}$) и снос длиной b . Отношение их длин равно всё тому же отношению скоростей, откуда

$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{b}.$$

Решая это уравнение относительно h , получим ответ:

$$h = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Задача 6.



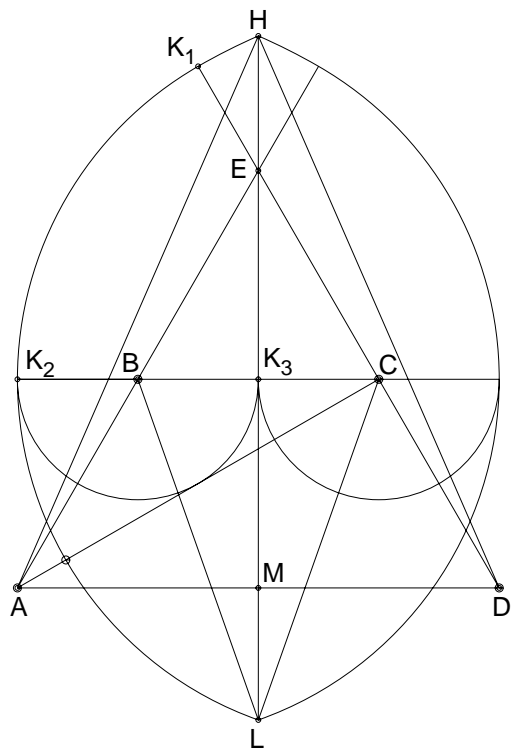
В-1

Баран на пастбище привязан сразу к двум деревьям, верёвками по 5 метров длиной. На пастбище есть ещё два дерева. Вместе эти деревья образуют 4 соседние вершины правильного шестиугольника со стороной в 2 метра (см. рисунок)

Насколько близко он сможет подойти к дереву, к которому привязан?

Ответ: $2\sqrt{3} - 3$.

Решение.



Нужно понять, какую область может очертить баран. Обозначим точками A, B, C, D деревья, к A и D он привязан. AB и CD пересекаются в точке E . Треугольник AED получится равносторонний, со стороной 4, BC — его средняя линия.

Обозначим H самую северную точку, до которой баран может дотянуться. Получится прямоугольный треугольник HMD с гипотенузой $HD = 5$ и катетом $MD = 2$.

Если пойти против часовой стрелки, баран будет описывать окружность радиуса 5 с центром в D . Однако долго это не продлится — натянутая верёвка наткнётся на дерево C . Окружность радиуса 5 закончится в точке K_1 .

Дальше баран будет описывать окружность радиуса 3 с центром в точке C , пока натянутая верёвка не наткнётся на B . Окружность закончится в K_2 .

Если он продолжит идти против часовой стрелки, он будет описывать окружность радиуса 1 вокруг центра B . (Дуга K_2K_3 .)

Однако ещё он может спуститься между деревьями B и C и исследовать юг. Самая южная доступная ему точка — L . В треугольнике BCL стороны равны 2, 3, 3, потому что CL и BL — натянутые верёвки, от которых осталось по три метра.

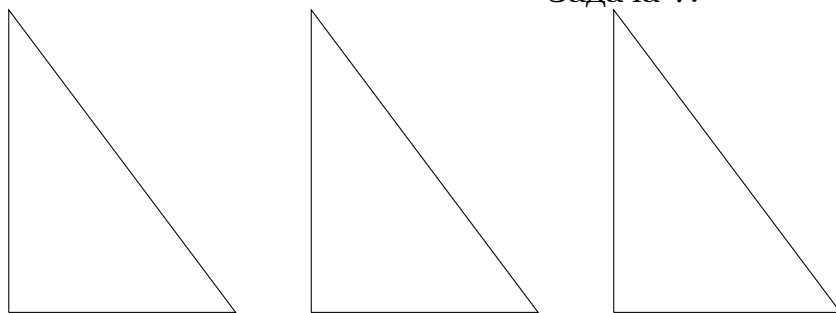
Если он начнёт очерчивать границу по часовой стрелке, он опишет дугу LK_2 — это дуга окружности радиусом 3 с центром в C . Маленькая окружность K_2K_3 целиком окажется внутри большой.

Правая граница фигуры будет симметрична левой.

Насколько близко он подойдёт к дереву-привязи? Надо найти расстояние между A и дугой K_2L . Центр этой окружности — в C , радиус окружности = 3, а $AC = 2\sqrt{3}$, как высота равно-стороннего треугольника AED . Отсюда получаем ответ: $AC - r = 2\sqrt{3} - 3$.

Задача 7.

В-1



На плоскости есть три одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5. Они одинаково ориентированы, их можно двигать и вращать, но нельзя накладывать друг на друга (касаться сторонами можно) и нельзя класть обратной стороной вверх (то есть, как бы вы ни двигали треугольник, стороны 3 - 4 - 5 будут расположены по ходу часовой стрелки).

Посчитайте, сколько различных «жестких» фигур можно собрать, используя все эти треугольники. Фигура считается «жесткой», если у каждого её треугольника есть с каким-нибудь другим треугольником общая вершина и общий граничный отрезок с концом в этой вершине (необязательно целая сторона).

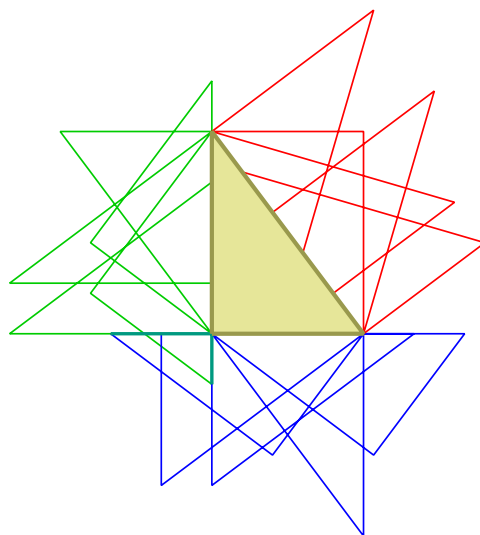
Ответ: 73

Решение. Треугольники могут крепиться друг к другу так: либо каждый прикреплен к каждому (получается этакое кольцо), либо же к одному из треугольников (назовём его центральным) «жестко» прикреплены два остальных (назовём их соседями). Рассмотрим сначала второй случай.

Берём один из треугольников, он будет выполнять роль центрального. «Жестко» прикрепить два других треугольника к одной и той же его стороне нельзя без существенного наложения треугольников (это было бы возможно, если бы одна из сторон была по крайней мере в 2 раза короче другой). Значит, для крепежа надо выбрать пару сторон центрального треугольника. Это можно сделать тремя способами (3,4 или 3,5 или 4,5). К каждой из выбранных сторон центрального треугольника другой треугольник можно «жестко» прикрепить 5 способами ($1+2+2$: 1 способ для крепления со стороной такой же длины, а для каждой из двух других сторон соседнего треугольника есть два способа, так как в этом случае есть выбор, какую из двух вершин делать общей). На рисунке разными цветами для разных сторон центрального треугольника показано по 5 способов крепления соседа.

Итак, есть 3 способа выбрать пару сторон центрального треугольника, а для каждой из выбранных сторон — по 5 способов прикрепить соседа. Всего получается $3 \times 5 \times 5 = 75$ способов.

Осталось выбросить те из них, у которых имеется существенное наложение треугольников. Из рисунка видно, что отбраковываются 2 способа, в каждом из которых участвует зелёный сосед, крепящийся гипотенузой к длинному катету центрального треугольника с самым острым углом при общей вершине. Он накладывается на синего соседа, крепящегося гипотенузой к короткому катету с не самым острым углом при общей вершине, а также на синего соседа, крепящегося своим длинным катетом к короткому катету центрального треугольника с разными острыми углами при общей вершине. Таким образом, для случая «центр и два со-



седа» имеется $75 - 2 = 73$ способа составить «жесткую» фигуру.

Что касается «кольцевого» случая, то из того же рисунка видно, что он невозможен: хотя и есть варианты, когда каждая пара составляющих фигуру треугольников имеет общий граничный отрезок, одной из таких пар (зелёно-синей) не хватает общей вершины.
