

Задача 1.

В-1

В тарелке 28 яблок и груш. Среди любых 11 фруктов есть хотя бы одно яблоко, а среди любых 19 фруктов есть хотя бы одна груша. Сколько яблок и сколько груш в тарелке?

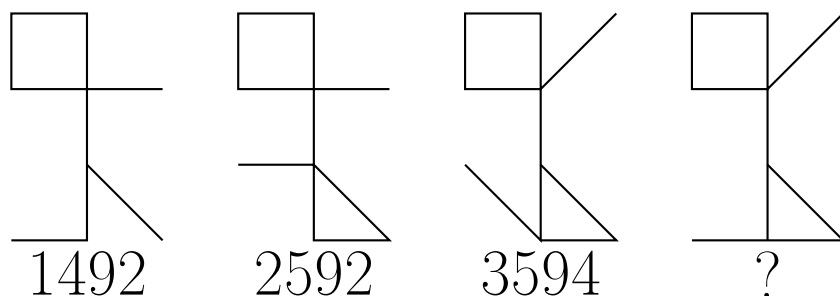
Ответ: 18 яблок, 10 груш.

Решение. Так как из 11 фруктов есть хотя бы одно яблоко, то груш не более 10. Из 19 фруктов есть хотя бы одна груша, значит, яблок не более 18. Всего 28 фруктов, поэтому груш 10, а яблок — 18.

Задача 2.

В-1

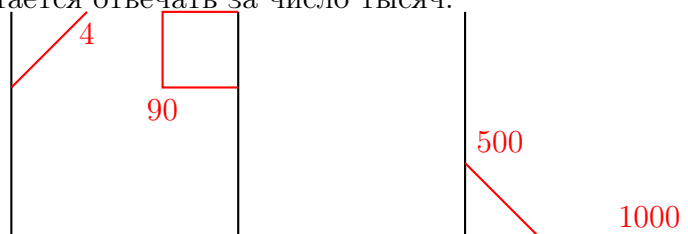
В одном средневековом монастыре пользовались такой системой записи чисел:



Какое число стоит на четвёртом месте? Ответ поясните.

Ответ: 1594

Решение. Ответвления сверху справа описывают число единиц, сверху слева — десятков, снизу справа — сотен, снизу слева — тысяч. Как это понять? Фигура «квадрат слева сверху» повторяется на всех рисунках. Что общего у всех известных подписей? Число 9 на втором месте. Значит, квадрату соответствует 90, а этот угол отвечает за число десятков. У первого и второго рисунка есть общее: горизонтальная черта сверху справа. У первого и второго числа из общего — двойка. Значит, правый верхний угол отвечает за единицы. Горизонтальная черта в этом углу обозначает двойку, а значит, оставшаяся косая — четвёрку, как мы видим по третьему числу. У второго и третьего рисунка из общего — треугольник справа снизу, у второго и третьего числа общее — 5, число сотен. Значит, правый нижний угол отвечает за сотни, аналогично разгадываем значения рисунков в правом нижнем углу. Остаётся левый нижний угол, которому остаётся отвечать за число тысяч.



Задача 3.

В-1 На уроке труда школьника попросили склеить подставку под горячее: это квадрат, составленный из 9 маленьких квадратиков разной окраски. На нижнюю сторону подставки клеится пробковый слой, чтобы не поцарапать столешницу. Соединить квадратики нужно так, чтобы квадратики одинакового цвета не имели общей стороны. Сколько разных вариантов подставок можно получить, имея 4 зелёных, 3 красных и 2 жёлтых квадратика? Подставки считаются разными, если их нельзя повернуть на столе так, чтобы расположение цветов совпало.

Ответ: 6

Решение. Для наглядности и чтобы постоянно не вспоминать, сколько каких цветов, будем обозначать квадратики не цветом и не буквой – сокращением цвета, а цифрой, показывающей, сколько таких квадратиков у нас есть. Прежде всего, варианты подставок могут отличаться центральным квадратиком: никаким поворотом другой квадратик в центр не загонишь. Рассмотрим отдельно три такие случая.

Случай «2 в центре». Согласно правилу разноцветных соседей, другая двойка может быть только в углу. Так как подставку разрешается поворачивать, будем считать, что вторая двойка в правом верхнем углу. Чтобы избежать одноцветных соседей, ещё один цвет, который окажется в одном из оставшихся углов, должен быть и во всех остальных углах, но никак не в боковом квадратике. Так как свободных углов осталось 3, а боковых квадратиков — 4, получаем единственный для этого случая вариант:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 2 |
| 4 | 2 | 4 |
| 3 | 4 | 3 |

Случай «3 в центре». Две другие тройки могут быть только в углах, в соседних или противоположных. В обоих случаях двойки могут быть только в углах: иначе среди оставшихся для четвёрок квадратиков будут соседние. Получаем ещё два варианта:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 3 |

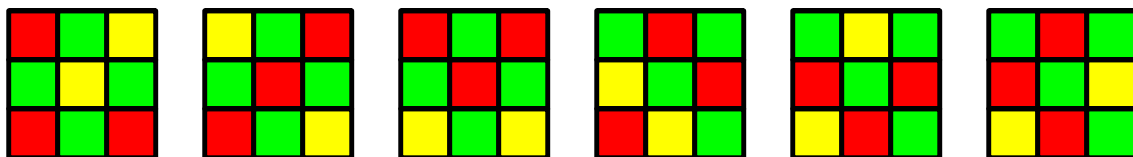
Случай «4 в центре». Остальные четвёрки могут быть только в углах. Поворотом можно добиться, чтобы свободным от четвёрок остался, скажем левый нижний угол. Если в этом углу тройка, то остальные тройки могут быть только в удалённых от этого угла боковых квадратиках. Если же в углу двойка, то другая двойка может быть в одном из удалённых боковых квадратиков. Последние варианты похожи, но поворотом их не совместить. Поэтому получаем ещё три варианта:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 4 |
| 3 | 4 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 2 |
| 2 | 3 | 4 |

Итого получили 6 различных вариантов:



Задача 4.

В-1 Гагара вылетела из населённого пункта Уэлен на Чукотке 1 июля ровно в 3 часа утра по местному времени и прилетела в населённый пункт Уэйлс на Аляске 30 июня ровно в 10 часов утра по местному времени. Оттуда гагара вылетела 1 июля в 3 часа дня по местному времени и прилетела обратно в Уэлен 2 июля в 4 часа дня по местному времени. Определите длительность полёта гагары в одну сторону, если известно, что в обе стороны она летела с одной и той же постоянной скоростью одним и тем же кратчайшим маршрутом, который пересекает линию перемены дат.

Ответ: 4 часа.

Решение. Разница между местным временем прилёта в Уэйлс и местным временем вылета из Уэлена составляет (-17) часов, а разница между местным временем прилёта в Уэлен и местным временем вылета из Уэйлса составляет 25 часов. Эта разность в первом случае складывается из длительности полёта, разности часовых поясов и (-24) часов, «сэкономленных» за счёт линии перемены дат, а во втором случае — из длительности полёта, разности часовых поясов (в обратную сторону) и «лишних» 24 часов, добавившихся из-за перемены дат. Значит, если сложить эти две разности, то разности часовых поясов сократятся, а также сократятся «сэкономленные» и «лишние» 24 часа, и останется просто удвоенная длительность полёта. Значит, длительность полёта равна $(-17 + 25) : 2 = 4$ часа.

Задача 5.

В-1

Некто раздобыл вот такие часы. Чтоб от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтоб часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.



Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00.

Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?

Ответ: 11/124

Решение. За март часовая стрелка нормальных часов делает $31 \cdot 2 = 62$ оборота. Когда показания часов из условия правильные? В том случае, если они начали оборот одновременно с нормальными часами — после такого совпадения 11 часов подряд показания сломанных часов будут правильные. Сколько будет таких совпадений за месяц? Чтоб было такое совпадение, нужно, чтобы некоторое число 11-тичасовых циклов совпало по длительности с некоторым числом 12-тичасовых циклов. Иными словами, решаем уравнение $11 \cdot k = 12 \cdot m$ в целых числах, причём — m меняется от 0 до 61. 11 и 12 взаимно просты, поэтому ответы следующие:

$$(m = 0, k = 0 \text{ (это самый первый день)}); (m = 11, k = 12); (m = 22, k = 24);$$

$$(m = 33, k = 36); (m = 44, k = 48); (m = 55, k = 60).$$

Итого — 6 совпадений, поэтому правильными показаниями мы сможем наслаждаться $11 \cdot 6 = 66$ часов в месяц, а всего в марте $31 \cdot 24 = 744$ часа. Отсюда — ответ, равный

$$\frac{66}{744} = \frac{33}{372} = \frac{11}{124}.$$

Задача 6.

В-1

До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\bar{a} = 1, \bar{b} = 2, \bar{r} = 3, \bar{d} = 4, \bar{e} = 5, \bar{i} = 8;$$

$$\bar{k} = 20, \bar{l} = 30, \bar{m} = 40, \bar{n} = 50, \bar{o} = 70, \bar{p} = 80, \bar{c} = 90;$$

$$\bar{p} = 100, \bar{c} = 200, \bar{t} = 300, \bar{y} = 400, \bar{f} = 500, \bar{x} = 600, \bar{ц} = 900.$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\bar{цла} = \bar{ц} + \bar{l} + \bar{a} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\bar{мд} = 44$. Или $\bar{ра} = 101$.

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\bar{да}$, $\bar{чух}$, $\bar{или}$, $\bar{ал}$, \bar{oooo} запрещены.

Найдите хотя бы одно решение ребуса в современных буквах

$$(\bar{**} + \bar{*} \times \bar{***}) \times \bar{*} = \bar{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

Ответ: $(78 + 3 \times 124) \times 2 = 900$ (старомодно: $(\bar{oi} + \bar{r} \times \bar{ркд}) \times \bar{b} = \bar{ц}.$)
или $(58 + 2 \times 121) \times 3 = 900$ (старомодно: $(\bar{ni} + \bar{b} \times \bar{рка}) \times \bar{r} = \bar{ц}.)$

Решение. Сначала нужно понять отличие этой системы от десятичной — по количеству цифр в десятичной записи можно приблизительно определить величину числа. По количеству букв о величине числа судить сложнее. Скажем, число из одной цифры обязательно меньше десяти, а вот число из одной буквы вполне может быть и 5, и 50, и даже 500. Однако — в скобке находится число из трёх букв. Вот оно обязано содержать по букве из каждой строки (потому что иначе мы три буквы по правилам просто не наберём), и поэтому оно заведомо больше ста. Более того — это число на что-то умножается, и это, по условию, не умножение на единицу — значит, в скобках у нас число, большее чем 200. Скобку мы, в свою очередь, тоже на что-то умножаем, и не на единицу — значит, левая часть заведомо больше 400. Больше того, если вспомнить, что буквам запрещено повторяться, получим следующий вывод — число, большее ста, умножается на одно и на другое однозначное число. Самый «экономный» вариант для этой пары — это 2 и 3. То есть левая часть равенства как минимум больше 600.

И равно это всё правой части — числу из одной буквы. Какие есть варианты? Только один: 900 (ц). А другие однобуквенные числа — это 2 и 3, или 2 и 4, в каком-то порядке. Все другие варианты сразу дают слишком большие числа.

Сначала: 2 и 3. Итак, $(\bar{**} + 3 \times \bar{***}) \times 2 = 900$, вместе с ним другой вариант: $(\bar{**} + 2 \times \bar{***}) \times 3 = 900$. Сразу узнаём первую букву трёхзначного числа — это (р), то есть 100. Любая другая буква даст слишком большое произведение. $(\bar{**} + 3 \times \bar{р**}) \times 2 = 900$ вместе с $(\bar{**} + 2 \times \bar{р**}) \times 3 = 900$. Поделим: $\bar{**} + 3 \times \bar{р**} = 450$ вместе с $\bar{**} + 2 \times \bar{р**} = 300$. Вынесем наружу Р, сотню, это будет $\bar{**} + 300 + 3 \times \bar{**} = 450$ вместе с $\bar{**} + 200 + 2 \times \bar{**} = 300$. Ну то есть, наконец:

$$\bar{**} + 3 \times \bar{**} = 150,$$

$$\bar{**} + 2 \times \bar{**} = 100.$$

Второе слагаемое в каждом случае состоит из десятков и единиц (потому что оно отделено от трёхзначного числа), а вот первое, в принципе, не обязано состоять из десятков и единиц. Впрочем, очевидно, что вариант «сотни плюс десятки» слишком большой (больше 200). Так что оба числа — «десятки и единицы»

На роль последних цифр (букв) у нас остаются только 1,4,5,8 (ведь 2 и 3 уже заняты). Нужно выбрать цифры так, чтобы одна, плюс удвоенная (или утроенная) другая давали число, кратное 10. Вариантов три: $8 + 2 \cdot 1 = 10$, $8 + 3 \cdot 4 = 20$, $4 + 2 \cdot 8 = 20$.

Остаётся для каждого из случаев перебрать возможные буквы для десятков. В первом случае уже есть две гласные (А=1 и И=8), поэтому перебор десятков идёт среди согласных букв. Во втором случае гласная одна (И=8), поэтому среди десятков обязана быть буква О, единственная гласная из второго ряда. В третьем случае мы пока не набрали никаких гласных, поэтому обе гласных должны найтись среди десятков, но так как среди десятков гласная всего одна, О, ничего мы найти не сможем, третий вариант отбрасываем.

Перебор оставит нас с **двумя ответами**: $(78 + 3 \times 124) \times 2 = 900$ (старомодно: $(\overline{oi} + \overline{r} \times \overline{pka}) \times \overline{v} = \overline{p}$), или $(58 + 2 \times 121) \times 3 = 900$ (старомодно: $(\overline{ni} + \overline{v} \times \overline{pka}) \times \overline{r} = \overline{p}$).

Теперь вернёмся к случаю, когда однобуквенные числа равны 2 и 4. Там тоже первая буква трёхзначного числа равна Р, и, когда мы так же раскроем скобки, получатся такие варианты:

$$\overline{**} + 2 \times \overline{**} = 25, \quad \overline{**} + 4 \times \overline{**} = 50.$$

Оба этих варианта невозможны: буквы для десятков (20,30 и т.д.) слишком велики, чтобы дать такие маленькие суммы.

От участника настолько подробное решение не требуется: задание просит «найти» решения, без доказательства того, что остальных нет.
