

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Заключительный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

---

**Задача 1.**

**В-1** Вычислите

$$\left[ \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} \right],$$

где  $[t]$  — это целая часть числа  $t$  (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ .)

**Ответ:** -10

**Решение.** Обозначим

$$t = \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}.$$

Так как  $t^2 = 90 - 2\sqrt{45^2 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2025 - 2023} = 90 - 2\sqrt{2}$ , и при этом  $t < 0$ , значит  $t = -\sqrt{90 - 2\sqrt{2}}$ . Поскольку  $81 < 90 - 2\sqrt{2} < 100$ , то  $-10 < t < -9$ , и  $[t] = -10$ .

---

**Задача 2.**

**В-1** При каком наименьшем по модулю значении параметра  $\alpha$  уравнение

$$1234 \sin^{20} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - 789 \cos^{23} \left( \alpha x - \frac{\pi}{4} \right) = 2023$$

имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ?

**Ответ:**  $-0,9$

**Решение.** Так как синус и косинус по модулю не превосходят 1, а  $1234 + 789 = 2023$ , решением уравнения может быть только такой  $x$ , при котором входящие в уравнение синус и косинус равны соответственно  $\pm 1$  (при возведении в 20-ю степень даст 1) и  $-1$  (таким же останется при возведении в 23-ю степень). Отсюда находятся последовательности возможных значений для  $x$  и для  $\alpha x$  (см. таблицу ниже для различных вариантов).

Эти значения включают в себя целочисленные параметры  $k$  и  $n$ , причем условие  $-\pi \leq x \leq \pi$  приводит к ограничению на возможные целые значения параметра  $k$ . Для всех вариантов оказывается, что  $k$  может быть равным либо  $-1$ , либо  $0$ .

Чтобы полученные для  $\alpha x$  и  $x$  значения могли достигаться при одном и том же  $x$ , надо, чтобы их отношение совпадало с  $\alpha$ . Таким образом, наше уравнение имеет решение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , когда  $\alpha$  представимо в виде дроби из таблицы, в которой  $k$  равно  $-1$  или  $0$ , а  $n$  — любое целое число.

	$\sin^{20}$	$\cos^{23}$	$x$	$\alpha x$	$\alpha$	$\min  \alpha $ при $\alpha = \dots$
В-1	$\left( x - \frac{\pi}{3} \right)$	$\left( \alpha x - \frac{\pi}{4} \right)$	$\frac{5\pi}{6} + \pi k$	$\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{15 + 24n}{10 + 12k}$	$\frac{-9}{10} = -0,9$

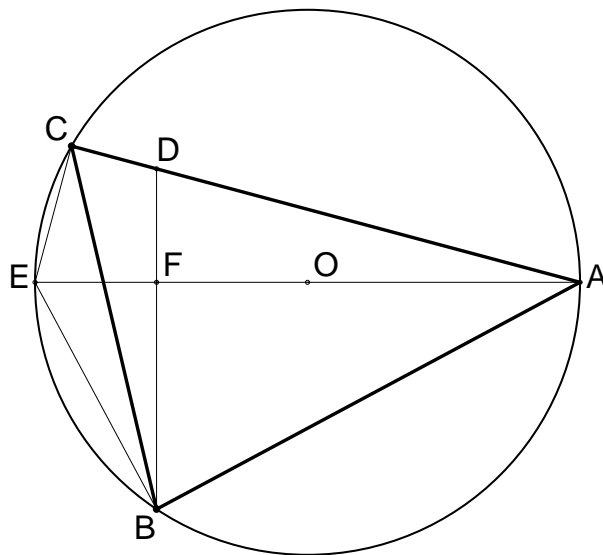
Чтобы найти такую дробь с наименьшим модулем, выберем  $n$ , минимизирующее модуль числителя, (для приведенных числителей это 0 или  $-1$ ), а также допустимое  $k$ , максимизирующее модуль знаменателя.

---

**Задача 3.**

**В-1** В треугольнике  $ABC$  длины сторон  $AB = 84$ ,  $AC = 98$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Прямая  $BD$ , перпендикулярная прямой  $AO$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

**Ответ:** 26



**Решение.**

Обозначим: длина  $AB = c$ , длина  $AC = b$ .

$$\angle ABE = \frac{\pi}{2} \Rightarrow ABE \text{ подобен } BFA : \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Leftrightarrow AE \cdot AF = c^2.$$

$$\angle ACE = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AEC \text{ подобен } AFD : \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AF} \Leftrightarrow AD = \frac{AE \cdot AF}{AC} = \frac{c^2}{b};$$

$$CD = AC - AD = b - \frac{c^2}{b} = \frac{b^2 - c^2}{b}.$$

Ответ:  $\frac{b^2 - c^2}{b}$

---

**Задача 4.**

**В-1** Пловец решил переплыть реку. Сначала он взял направление перпендикулярно течению — и течение снесло его на 12 метров. Оттуда он решил вернуться туда, откуда начал — он взял направление на точку, из которой началось плавание, и теперь течение снесло его на 20 метров от желаемой точки. Найдите ширину реки.

**Ответ:** 9

**Решение.** Пусть  $h$  — ширина реки, а  $a = 12$  и  $b = 20$  — заданные в условии отосы.

При первом заплыве вектор абсолютной скорости пловца был равен сумме продольной составляющей (скорости течения) и поперечной составляющей, модуль которой равен собственной скорости пловца в стоячей воде. Так как за время, за которое пловец переплыл реку, он переместился на  $h$  в поперечном направлении и на  $a$  в продольном, отношение его собственной скорости к скорости течения равно  $h/a$ .

Во время второго заплыва вектор абсолютной скорости был равен сумме всё той же продольной составляющей (скорости течения) и наклонной составляющей, направленной от точки второго старта к желаемой точке финиша и равной по модулю собственной скорости пловца. Умножая векторы скорости на время второго заплыва, получим два вектора перемещения: желаемый (длиной  $\sqrt{a^2 + h^2}$ ) и снос длиной  $b$ . Отношение их длин равно всё тому же отношению скоростей, откуда

$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{b}.$$

Решая это уравнение относительно  $h$ , получим ответ:

$$h = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

---

**Задача 5.**

**В-1** Найдите площадь плоской фигуры, границы которой описываются уравнением

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1.$$

**Ответ:** 46

**Решение.**

Будем постепенно раскрывать модули.

1. Пусть  $y \geq 0$ . Тогда выражение имеет вид

$$||x| + |y - 3| - 3| = 1.$$

1.1. Пусть  $y \geq 3$ , тогда выражение имеет вид

$$||x| + y - 6| = 1.$$

1.1.1 Так как в функции берется модуль от  $x$ , то это означает, что можно начертить график в области  $x \geq 0$  и сделать симметрию, относительно оси  $Oy$ . Тогда рассмотрим выражение:

$$|x + y - 6| = 1.$$

Рассмотрим, в общем, график функции  $|kx + y - a| = b$ . Раскрывая модуль, мы получим следующее:

1. Если  $kx + y - a \geq 0$ , то  $kx + y - (a + b) = 0$ . График — прямая, проходящая через точки  $(0, a + b)$ ,  $\left(\frac{a + b}{k}, 0\right)$ .

2. Если  $kx + y - a < 0$ , тогда  $-kx - y + a - b = 0$ . График — прямая, проходящая через точки  $(0, a - b)$ ,  $\left(\frac{a - b}{k}, 0\right)$ .

Таким образом в области  $x \geq 0$ ,  $y \geq 3$  мы имеем пару параллельных прямых, проходящих через точки  $(0, 7) - (4, 3)$  и  $(0, 5) - (2, 3)$ .

1.2. Пусть  $0 \leq y < 3$ , тогда выражение имеет вид

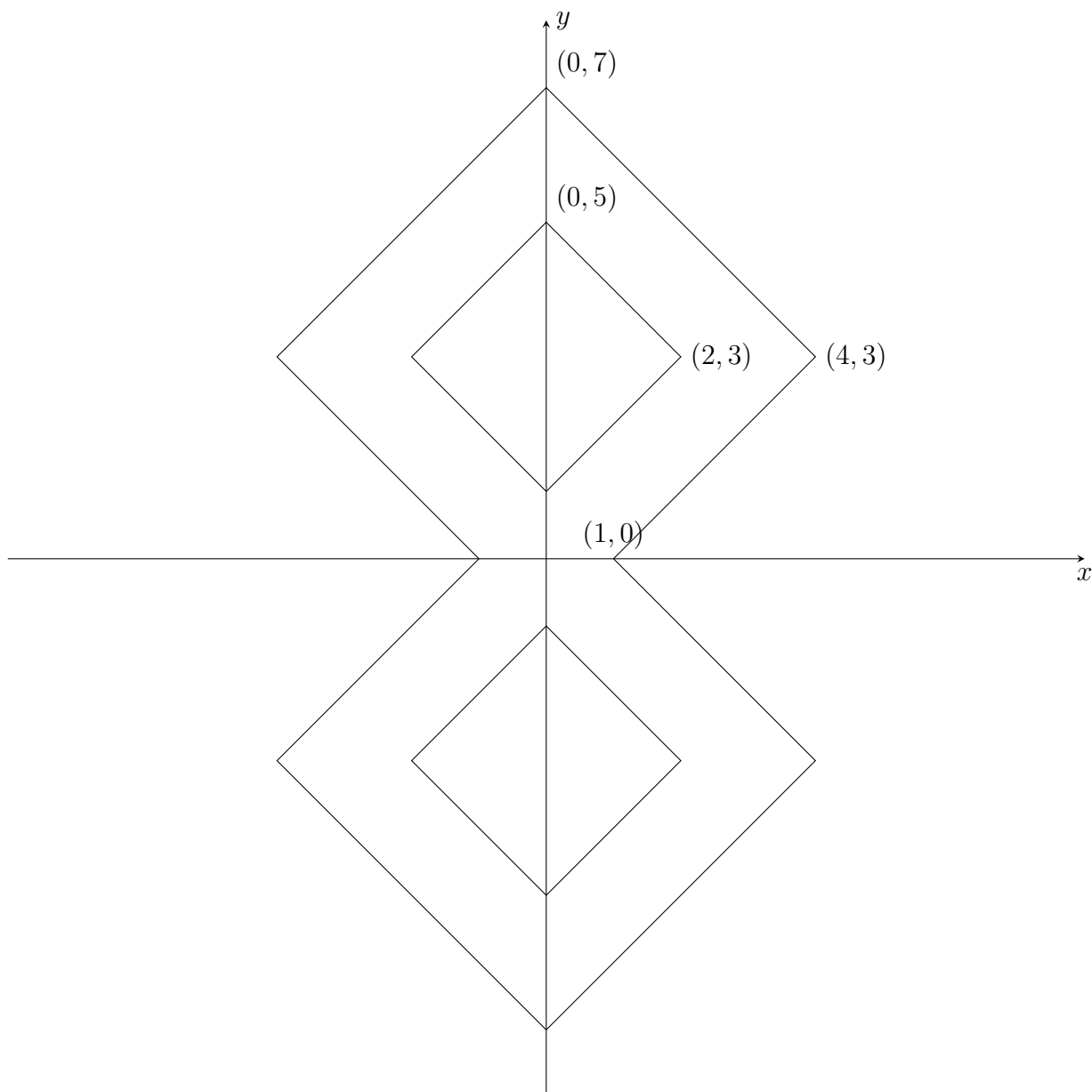
$$||x| - y| = 1.$$

Теперь опять применим свойство модуля  $|x|$  и будем исследовать выражение

$$|x - y| = 1.$$

Раскроем модуль, получим график — две параллельные прямые, проходящие через точки  $(2, 3) - (0, 1)$  и  $(4, 3) - (1, 0)$ .

В области, где  $y < 0$  также воспользуемся свойством модуля. График в этой области симметричен относительно оси  $Ox$ . Таким образом, получаем следующую фигуру



Теперь посчитаем площадь. Так как фигура симметрична относительно оси  $Ox$ , достаточно посчитать площадь верхней половины. Удобнее всего увидеть, что это квадрат со стороной  $4\sqrt{2}$  из которого «вырезали» меньший квадрат со стороной  $2\sqrt{2}$  и «отрезали» угол — равнобедренный прямоугольный треугольник, высота которого к гипотенузе равна 1, а гипотенуза равна 2.

Таким образом площадь равна:

$$2 \cdot \left( (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right) = 46.$$


---

**Задача 6.**

**В-1** Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

**Ответ:** 225

**Решение.** Пусть купили  $x^2$  плиток, в ширину прямоугольной комнаты укладывается  $y$  плиток. Тогда верно равенство

$$y(y + 11) = x^2 - 15.$$

Дискриминант квадратного уравнения  $y^2 + 11y - x^2 + 15 = 0$  относительно  $y$  равен  $D = 121 + 4x^2 - 60 = 61 + 4x^2$ . Чтобы уравнение имело целое решение, число  $61 + 4x^2$  должно быть нечетным квадратом, т.е.

$$61 + 4x^2 = z^2,$$

откуда  $(z - 2x)(z + 2x) = 61$ . Т.к. 61 — простое число, то  $z - 2x = 1$  и  $z + 2x = 61$ , откуда  $z = 31$ ,  $x = 15$ .

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Заключительный этап 2022/23 учебного года для 10 класса

**Задача 7.**

**В-1** На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

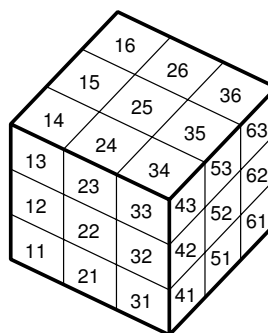
- 1) при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;
- 2) при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

**Ответ:** 19

**Решение.** Для отслеживания движения жучка будем использовать частичную развертку куба, покрывающую 3 грани. Каждый квадратик будем обозначать двузначным числом, 1-я и 2-я цифры которого являются соответствующими координатами центра квадратика на развертке (единица — ширина квадратика):

16	26	36			
15	25	35			
14	24	34			
13	23	33	43	53	63
12	22	32	42	52	62
11	21	31	41	51	61



Маршрут жучка определяется его начальным положением и направлением его первого перемещения. Хотя всего таких вариантов  $54 \times 4$ , их все можно разбить на 9 принципиально различных групп:

- 1) жучок стартует с центрального квадратика любой грани по направлению к любому ребру;
- 2–3) старт с углового квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка;
- 4–5) старт с углового квадратика любой грани, а при первом перемещении жучок переползает на соседнюю грань, причем третья примыкающая грань остается соответственно справа или слева от него;
- 6) старт с приреберного квадратика любой грани по направлению к центру;
- 7) старт с приреберного квадратика любой грани с переходом на соседнюю грань при первом перемещении;
- 8–9) старт с приреберного квадратика любой грани, а первое перемещение в пределах той же грани вдоль ребра, идущего соответственно справа или слева от жучка.



Заполним таблицу, в которой для каждой группы приведем пример маршрута в течение того времени, когда обнаруживается его периодичность, т. е. когда на какой-либо четной секунде жучок оказывается на начальном квадратике, а еще через 1 с — на квадратике, где он был через 1 с после начала движения.

В случае группы 1 выберем для старта квадратик 22 с первым перемещением  $22 \rightarrow 23$  и проследим весь маршрут, пока не обнаружим, что его период равен 24 с (1-я колонка таблицы после двойной вертикальной черты).

Заметим, что через 2 с после начала движения жучок окажется в начальном состоянии группы 8. Поэтому для нее маршрут также будет иметь период 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 2 с.

Еще через 2 с жучок окажется в начальном состоянии группы 4. Поэтому и для нее маршрут будет с периодом 24 с и его можно получить из маршрута группы 1 сдвигом на 4 с.

Еще через 2 с имеем начальное состояние группы 7 и получаем ее маршрут с периодом 24 с из маршрута группы 1 сдвигом на 6 с.

Для остальных групп получаются кольцевые маршруты с периодом 8 с, причем в течение одного периода жучок ни на одном квадратике не оказывается дважды.

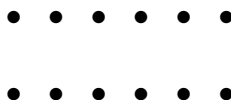
$T, \text{с}$	Гр. 1	Гр. 2	Гр. 3	Гр. 4	Гр. 5	Гр. 6	Гр. 7	Гр. 8	Гр. 9
0	22	31	31	43	13	21	23	24	12
1	23	32	21	33	14	22	24	34	13
2	24	33	11	23	15	23	25	43	14
3	34	43	12	24	25	33	35	33	24
4	43	53	13	25	35	43	53	23	34
5	33	52	23	35	34	42	43	24	33
6	23	51	33	53	33	41	33	25	32
7	24	41	32	43	23	31	34	35	22
8	25	31	31	33	13	21	35	53	12
9	35	32	21	34	14	22	53	43	13
10	53			35			52	33	
11	43			53			42	34	
12	33			52			32	35	
13	34			42			33	53	
14	35			32			34	52	
15	53			33			43	42	
16	52			34			42	32	
17	42			43			32	33	
18	32			42			22	34	
19	33			32			23	43	
20	34			22			24	42	
21	43			23			34	32	
22	42			24			43	22	
23	32			34			33	23	
24	22			43			23	24	
25	23			33			24	34	

Так как  $2023 \equiv 7 \pmod{24}$  (остаток от деления 2023 на 24 равен 7) и  $2023 \equiv 7 \pmod{8}$  (остаток от деления 2023 на 8 равен 7), то через 2023 с после начала движения жучок окажется на том же квадратике, на котором он был через 7 с после начала, а за 5 с до этого — на том же квадратике, на котором он был через 2 с после начала.

Как видно из таблицы, такое совпадение имеет место только для группы 1 (квадратик 24). Так как этот квадратик встречается на маршруте только дважды в течение периода (2 с и 7 с), следующее попадание на него произойдет через  $2 + 24 - 7 = 19$  (с).

### Задача 8.

**В-1**



Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?

**Ответ:** 101

**Решение.** Пусть в каждом ряду по  $n$  точек. Способ соединить точки можно задать перестановкой  $n$  чисел,  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ : первая точка верхнего ряда соединяется с точкой под номером  $i_1$ , вторая — с  $i_2$ , и так далее. Значит, всего возможных рисунков будет  $n!$ .

Теперь берём пару отрезков. Пусть это отрезки с концами  $a, i_a$  и  $b, i_b$ , считаем  $a < b$ . В каком случае они пересекаются? В том, когда  $i_a > i_b$ . Учитывая, что  $a, b$  могут быть любой парой, замечаем следующее: общее количество пересечений отрезков равно количеству случаев, когда в перестановке большее число стоит раньше меньшего (не обязательно по соседству). Как сказали бы старшие товарищи, число пересечений равно числу инверсий в перестановке. Так и будем говорить дальше.

Например, 12345 — нет инверсий и нет пересечений, 21345 — одна инверсия (2 и 1), 43152 — 6 инверсий (4 и 3, 4 и 1, 4 и 2, 3 и 1, 3 и 2, 5 и 2). Наибольшее количество инверсий будет, если написать числа задом наперёд: 54321, какие два числа не выбери — большее будет стоять раньше. То есть инверсий в последнем примере 10, а в общем случае —  $C_n^2$ .

Как посчитать число перестановок с заданным количеством инверсий? Подойдём к задаче индуктивно. В фигурных скобках будем указывать различные перестановки, а в квадратных перечислим количества перестановок, имеющих соответственно  $0, 1, \dots, C_n^2$  инверсий.

Итак, единственный элемент можно расположить единственным образом, и у нас есть одна перестановка с нулевым числом инверсий.

$$\{1\}; \quad [1]$$

Добавляем двойку — её можно добавить в начало и в конец имеющейся перестановки  $\{1\}$ . Одна из полученных перестановок будет без инверсий, другая — с одной инверсией.

$$\underbrace{\{12\}}_{0 \text{ инверсий}}, \underbrace{\{21\}}_{1 \text{ инверсия}}; \quad [1, 1]$$

Добавляем тройку — её мы можем поставить в любое место каждой из имеющихся перестановок. Тройка больше всех имевшихся ранее чисел, поэтому если поставить её на последнее место — новых инверсий не добавится, если поставить на предпоследнее (на второе) — добавится одна инверсия, а если на первое — будет плюс две инверсии. Одна перестановка с нулём инверсий, две перестановки с одной, две перестановки с двумя, одна перестановка с тремя. То есть:

$$\underbrace{\{123\}}_{0+0}, \underbrace{\{213\}}_{1+0}, \underbrace{\{132\}}_{0+1}, \underbrace{\{231\}}_{1+1}, \underbrace{\{312\}}_{0+2}, \underbrace{\{321\}}_{1+2}; \quad [1, 2, 2, 1]$$

Так же будет происходить добавление нового числа  $n$  в общем случае: число  $n$  можно поставить на любое место, и в зависимости от места к инверсиям добавится  $+0, +1, +2, \dots, +(n-1)$  штук. То есть на новом шаге перестановка с  $l$  инверсиями превращается в  $n$  перестановок с  $l+0, l+1, l+2, \dots, l+(n-1)$  инверсиями соответственно.

Посмотрим, какие числа получались в квадратных скобках. Напишем эти последовательно одну под другой:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ \dots \end{array}$$

Здесь в  $n$ -й строке (нумерация начинается с 1) приводятся числа  $P_n^k$  для  $k = 0, 1, \dots, C_n^k$ , равные количеству перестановок из  $n$  чисел с  $k$  инверсиями.

Вспоминая, как происходит добавление нового  $n$ , получим

$$P_n^k = \underbrace{P_{n-1}^k}_{+0 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-1}}_{+1 \text{ инв.}} + \underbrace{P_{n-1}^{k-2}}_{+2 \text{ инв.}} + \dots + \underbrace{P_{n-1}^{k-n+1}}_{+(n-1) \text{ инв.}}.$$

Действительно,  $P_{n-1}^k$  — количество перестановок из  $(n-1)$  чисел, в которых уже есть  $k$  инверсий. В них мы вынуждены поставить новое  $n$  на последнее место (+0 инверсий). Раз мы ставим  $n$  на единственно возможное место, количество перестановок не изменится.

Далее,  $P_{n-1}^{k-1}$  — количество перестановок с  $(k-1)$  инверсией, и, чтобы добавить недостающую, мы вынуждены ставить  $n$  на предпоследнее место (+1 инверсия).

Продолжаем так вплоть до  $P_{n-1}^{k-n+1}$ , потому что добавить больше  $(n-1)$  инверсии нельзя. Всего получается  $n$  слагаемых. Из других перестановок предыдущей строки мы ничего нового получить не сможем.

Заметим, что  $P_n^{-k} = 0$ , так как не бывает перестановок с отрицательным числом инверсий, как и не может быть перестановок со слишком большим (больше чем  $C_n^2$ ) количеством инверсий.

Итак, имеем следующий способ построения коллекции  $P_n^k$ .

Первая строчка:

$$\dots 0 \underbrace{0 \ 0}_{\rightarrow} 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

По строчке ползёт «окно» шириной 2. Попадавшие в «окно» числа складываются и выписываются в следующую (2-ю) строку:

$$\dots 0 \underbrace{(0 \ 0)}_{=0} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \quad \dots 0 \ 0 \underbrace{(0 \ 1)}_{=1} 0 \ 0 \ 0 \ \dots \quad \dots 0 \ 0 \ 0 \underbrace{(1 \ 0)}_{=1} 0 \ 0 \ \dots \quad \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \underbrace{(0 \ 0)}_{=0} 0 \ \dots$$

Вторая строка:

$$\dots 0 \underbrace{0 \ 0 \ 0}_{\rightarrow} 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

По ней будет ползти окно шириной 3. Сложение попавших в окно чисел даст третью строку:

$$\dots 0 \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_{\rightarrow} 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

По ней поползёт окно шириной 4, и так далее, чтобы получить  $n$ -ю строку, нужно складывать  $n$  стоящих подряд чисел предыдущей строки.

Выпишем (без нулей) первые 6 строк нашей коллекции и выберем в ней нужное нам  $P_6^7$ :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 5 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 9 \ 15 \ 20 \ 22 \ 20 \ 15 \ 9 \ 4 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 14 \ 29 \ 49 \ 71 \ 90 \ \underline{101} \ 101 \ 90 \ 71 \ 49 \ 29 \ 14 \ 5 \ 1 \end{array}$$

Заметим, что сумма чисел в каждой строке равна  $n!$  (общее число перестановок).