Универсиада «Ломоносов» по математике и механике
27 февраля 2022 г.

Направление «МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Задача 1.
Найдите интеграл

$$\int x \sin x \, dx.$$

Решение. $-x\cos x + \sin x$.

Задача 2.
Определите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{n} x^n.$$

Решение. $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Задача 3.
В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите расстояние между точкой $(3,-2,2,-1)$ и гиперплоскостью, заданной уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3$.
Решение. $\sqrt{10}$.

Задача 4.
Гипербола, проходящая через точку $M(24,5)$, имеет асимптоты $y = \pm\frac{5}{12}x$. Составьте каноническое уравнение гиперболы.
Решение. Так как точка, принадлежащая гиперболе, лежит в правой области между асимптотами, то уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ при этом } \frac{b}{a} = \frac{5}{12}.$$

Подставляя в уравнение гиперболы координаты точки M, и, учитывая соотношение на полуоси, получим $b^2 = 75$, $a^2 = 432$. Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{432} - \frac{y^2}{75} = 1.$$

Задача 5.
Найдите все положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3), \end{cases}$$

и исследуйте их на асимптотическую устойчивость.
Решение. Найдем положения равновесия системы из условия $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

$$\begin{cases} 0 = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ 0 = \ln(x^2 - 3), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + x^2 + y = 9, \\ x^2 - 3 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Обозначим $f_1(x,y) = 3 - \sqrt{4+x^2+y}$, $f_2(x,y) = \ln(x^2-3)$ правые части системы. Вычислим якобиан

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2x}{2\sqrt{4+x^2+y}} & \dfrac{-1}{2\sqrt{4+x^2+y}} \\ \\ \dfrac{2x}{x^2-3} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) При $(x_0, y_0) = (2,1)$ имеем $A(2,1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, и характеристический полином имеет вид

$$|A(2,1) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{3} - \lambda & -\dfrac{1}{6} \\ \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3}.$$

Так как у приведенного характеристического полинома все коэффициенты положительны, положение равновесия $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ асимптотически устойчиво.

2) При $(x_0, y_0) = (-2,1)$ имеем $A(-2,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, и характеристический полином имеет вид

$$|A(-2,1) - \lambda E| = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} - \lambda & -\dfrac{1}{6} \\ \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}.$$

Так как у приведенного полинома есть отрицательный коэффициент, положение равновесия $x_0 = -2$, $y_0 = 1$ не является асимптотически устойчивым.

Задача 6.
Решите дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Решение. $C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{5} e^{4x}$.

Задача 7.
Найдите допустимую экстремаль в задаче

$$J = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\, dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Решение. Лагранжиан $L(x, \dot{x}) = (\dot{x}^2 - x)$. Тогда

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = -1, \quad L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}.$$

Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0$$

примет вид

$$-2\ddot{x} - 1 = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} = -\frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad \dot{x}(t) = -\frac{t}{2} + C_1, \quad x(t) = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

Из первого граничного условия $x(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$, а из второго условия $x(1) = 0$ получаем $C_1 = \frac{1}{4}$. Таким образом допустимой экстремалью является функция

$$x^0(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4}.$$

Задача 8.
Найдите оптимальную траекторию $(x_1(t),\, x_2(t))$, портрет в фазовой плоскости $\{x_1,\, x_2\}$ и оптимальное управление для перевода системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad \text{из положения} \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 3, \end{cases} \quad \text{в положение} \begin{cases} x_1(2) = 2, \\ x_2(2) = 0. \end{cases}$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 u^2\, dt.$$

Решение. $u^0(t) = \frac{3}{2}t - 3$, $x_1(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t$, $x_2(t) = \frac{3}{4}t^2 - 3t + 3$.

Универсиада «Ломоносов» по математике и механике
27 февраля 2022 г.

Направление «МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ»

Задача 1.
Найдите интеграл

$$\int x\cos^2 x\,dx.$$

Решение. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x.$

Задача 2.
Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Решение.

$$\sum=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$\frac{d}{dx}\sum=1+x^2+x^4+\ldots,\quad \frac{d}{dx}\sum\cdot(1-x^2)=1\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}\sum=\frac{1}{1-x^2}\ \Rightarrow$$
$$\sum=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1.$$

Задача 3.
Определите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(1-2^n)}.$$

Решение. $[-2;2)$.

Задача 4.
В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите расстояние между точкой $(2,-1,3,-2)$ и гиперплоскостью, заданной уравнением $x_1-x_2+x_3-x_4=4$.
Решение. 2.

Задача 5.
Составьте уравнения касательных к гиперболе

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1,$$

проходящих через точку $M(1;4)$.
Решение. Уравнение касательной, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ на гиперболе, имеет вид

$$4x_0x-y_0y-4=0.$$

Так как точка M принадлежит этой прямой, ее координаты удовлетворяют этому уравнению

$$4x_0-4y_0-4=0.$$

Откуда получаем $y_0 = x_0 - 1$. В силу того, что точка M_0 лежит на гиперболе, получаем

$$4x_0^2 - (x_0-1)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_0^2 + 2x_0 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x_0+5)(x_0-1) = 0.$$

Точка касания $(1;0)$ и касательная $x - 1 = 0$, точка касания $\left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{8}{3}\right)$ и касательная $5x - 2y + 3$.

Задача 6.

Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1, \end{cases}$$

и исследуйте их на асимптотическую устойчивость.

Решение. Найдем положения равновесия системы из условия $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

$$\begin{cases} 0 = \ln(y^2 - x) \\ 0 = x - y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x = 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Обозначим $f_1(x,y) = \ln(y^2 - x)$, $f_2(x,y) = x - y - 1$ правые части системы. Вычислим якобиан

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{y^2 - x} & \dfrac{2y}{y^2 - x} \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) При $(x_0, y_0) = (0, -1)$ имеем $A(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, и характеристический полином имеет вид

$$|A(0,-1) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 3.$$

Так как у приведенного характеристического полинома все коэффициенты положительны, положение равновесия $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ асимптотически устойчиво.

2) При $(x_0, y_0) = (3, 2)$ имеем $A(3,2) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, и характеристический полином имеет вид

$$|A(3,2) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

Так как у приведенного полинома есть отрицательный коэффициент, положение равновесия $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ не является асимптотически устойчивым.

Задача 7.

Уравнение динамической системы имеет вид

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = q,$$

где x — скаляр, q — белый шум, $M[q(t)q(s)] = \delta(t-s)$. Найдите дисперсии $D_x(t)$ и $D_{\dot{x}}(t)$ при $t \to +\infty$.

Решение. $D_x = \dfrac{1}{\sqrt{60}}$, $D_{\dot{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Задача 8.

Вычислите определитель порядка $n \geqslant 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим первую строку к каждой из остальных. Получим верхнетреугольную матрицу. $\Delta_n = n!$.

Универсиада «Ломоносов» по математике и механике
27 февраля 2022 г.

Направление «МАТЕМАТИКА»

Задача 1.
Найдите интеграл

$$\int x \sin^3 x \, dx.$$

Решение. $\dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{3}{4} \cos x - \dfrac{1}{36}\sin 3x + \dfrac{1}{12} x \cos 3x.$

Задача 2.
Определите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

Решение. Определим радиус сходимости R степенного ряда по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{3}.$$

Исследуем поведение ряда в граничных точках.
При $x = -\dfrac{2}{3}$ ряд расходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}, \quad \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} \geqslant \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)}{n} = \frac{1}{3n}, \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \text{ расходится.}$$

При $x = -\dfrac{4}{3}$ ряд сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}, \quad \text{а ряды } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n n} \text{ сходятся.}$$

Таким образом, область сходимости $I = \left[-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Задача 3.
В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите расстояние между точкой $(5, -1, 4, -3)$ и гиперплоскостью, заданной уравнением $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$.
Решение. $\frac{1}{2}$.

Задача 4.
Составьте уравнение сферы, проходящей через окружность

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49, \quad 2x + 2y - z + 4 = 0$$

и начало координат.
Решение. Пусть точка $P(-1, 2, -2)$ – центр сферы $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49$, точка M – центр окружности, точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ – центр искомой сферы, точка $O(0,0,0)$ – начало координат, точка N – произвольная точка на окружности. Точки P, Q и M лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости $2x + 2y - z + 4 = 0$. Так как нормаль к этой плоскости – это вектор $(2, 2, -1)$, координаты точки Q можно задать так

$$x_Q = 2q - 1, \quad y_Q = 2q + 2, \quad z_Q = -q - 2.$$

Радиус искомой сферы удовлетворяет следующему соотношению

$$QO^2 = QN^2 = QM^2 + MN^2 = QM^2 + PN^2 - PM^2.$$

$$PN = 7, \quad PM = \frac{|2x_P + 2y_P - z_P + 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3}.$$

$$QO^2 = (2q-1)^2 + (2q+2)^2 + (-q-2)^2 = 9q^2 + 8q + 9, \quad QM = \frac{|2x_Q + 2y_Q - z_Q + 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|9q+8|}{3}.$$

Из выражения на радиус искомой сферы получим уравнение

$$9q^2 + 8q + 9 = \frac{81q^2 + 144q + 64}{9} + 49 - \frac{64}{9}, \quad \text{откуда } q = -5.$$

Тогда координаты центра искомой окружности $Q(-11, -8, 3)$ и квадрат радиуса $QO^2 = 121 + 64 + 9 = 194$.

$(x+11)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = 194$ или $x^2 + 22x + y^2 + 16y + z^2 - 6z = 0$.

Задача 5.
Найдите все положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2, \end{cases}$$

и исследуйте их на асимптотическую устойчивость.

Решение. Найдем положения равновесия системы из условия $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

$$\begin{cases} 0 = e^y - e^x, \\ 0 = \sqrt{3x + y^2} - 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x^2 + 3x = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Обозначим $f_1(x,y) = e^y - e^x$, $f_2(x,y) = \sqrt{3x + y^2} - 2$ правые части системы. Вычислим якобиан

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x & e^y \\ \dfrac{3}{2\sqrt{3x + y^2}} & \dfrac{2y}{2\sqrt{3x + y^2}} \end{pmatrix}.$$

1) При $(x_0, y_0) = (1, 1)$ имеем $A(1,1) = \begin{pmatrix} -e & e \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$, и характеристический полином имеет вид

$$|A(1,1) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -e - \lambda & e \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + e)(\lambda - \frac{1}{2}) - \frac{3}{4}e = \lambda^2 + (e - \frac{1}{2})\lambda - \frac{5}{4}e.$$

Так как у приведенного полинома есть отрицательный коэффициент, положение равновесия $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ не является асимптотически устойчивым.

2) При $(x_0, y_0) = (-4, -4)$ имеем $A(-4,-4) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{e^4} & \dfrac{1}{e^4} \\ \dfrac{3}{4} & -2 \end{pmatrix}$, и характеристический полином имеет вид

$$|A(-4,-4) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{e^4} - \lambda & \dfrac{1}{e^4} \\ \dfrac{3}{4} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \frac{1}{e^4})(\lambda + 2) - \frac{3}{4e^4} = \lambda^2 + (2 + \frac{1}{e^4})\lambda + \frac{5}{4e^4}.$$

Так как у приведенного характеристического полинома все коэффициенты положительны, положение равновесия $x_0 = -4$, $y_0 = -4$ асимптотически устойчиво.

Задача 6.
Решите дифференциальное уравнение $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin t$.
Решение. $x(t) = C_1 x^t + C_2 e^{2t} + \dfrac{1}{10}\sin t + \dfrac{3}{10}\cos t$.

Задача 7.
Множество точек комплексной плоскости удовлетворяет условию $|z - 3 - 4i| \leqslant 1$, где z – комплексная переменная, i – мнимая единица. В каких пределах может изменяться отношение $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$?
Решение.

$$\frac{6-\sqrt{6}}{4} \leqslant \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \leqslant \frac{6+\sqrt{6}}{4}.$$

Задача 8.
Найти площадь образа области $\{z = x + iy : x \in [0, \ln 3], y \in [0, \pi]\}$ под действием функции e^z.
Решение. 4π.

Universiade «Lomonosov» in Mathematics and Mechanics
February 27, 2022

Direction «GEOMETRY AND QUANTUM FIELDS»

Task 1.
Calculate the integral ($x \in \mathbb{R}$)

$$\int x \operatorname{ctg}^2 x \, dx.$$

SOLUTION. $-\dfrac{x^2}{2} - x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x|$.

Task 2.
Determine the interval of convergence of the power series ($x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} \cos nx}{9^n}.$$

SOLUTION. Interval of convergence is $x \in (-4; 2)$.

Task 3.
In Euclidean space $\mathbb{R}^4$ find the distance between the point $(-1, 2, 4, 1)$ and the hyperplane $x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2$.
SOLUTION. $\sqrt{3}$.

Task 4.
Ellipse have foci at points $F_1\,(-3; 0)$ и $F_2\,(3; 0)$ and tangent line is $x + y - 5 = 0$. Write an equation for an ellipse.
SOLUTION.

Compose the equation of an ellipse:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = C = \text{const}\,.$$

The condition of tangency of an ellipse to a line is equivalent to the fact that there is a unique point on the line $x + y - 5 = 0$, whose coordinates satisfy the ellipse equation, i.e. the equation

$$(x-3)^2 + (5-x)^2 + (x+3)^2 + (5-x)^2 + 2\sqrt{((x-3)^2 + (5-x)^2)((x+3)^2 + (5-x)^2)} = C^2$$

has a unique solution.

Set $B = C/2$, then

$$(9 - 2B^2)x^2 + 10B^2 x + B^2(B^2 - 34) = 0.$$

If $(9 - 2B^2) = 0$, then $C = 3\sqrt{2} < |F_1F_2|$.

If $(9 - 2B^2) \neq 0$, we get a quadratic equation with discriminant

$$8B^2(B^4 - 26B^2 + 153),$$

which vanishes at $B^2 = 9$ and $B^2 = 17$ ($B = 0$ exclude). In the first case $C = |F_1F_2|$. In the second case we obtain ellipse:

$$\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Task 5.
Find the equilibrium points of the system:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

For each point, determine whether the corresponding solution is stable or unstable.
SOLUTION. Let us find the equilibrium positions of the system from the condition $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

$$\begin{cases} 0 = y - x^2 - x, \\ 0 = 3x - x^2 - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = y - x^2 - x, \\ 0 = 2x - 2x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Denote $f_1(x, y) = y - x^2 - x$, $f_2(x, y) = 3x - x^2 - y$ right side of the system. Calculate the Jacobian

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 1 & 1 \\ -2x + 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) If $(x_0, y_0) = (0, 0)$ we have $A(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, and the characteristic polynomial has the form

$$|A(0, 0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 2.$$

Since the reduced characteristic polynomial has one of the coefficients negative, the equilibrium position $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ is not asymptotically stable.

2) If $(x_0, y_0) = (1, 2)$ we have $A(1, 2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, and the characteristic polynomial has the form

$$|A(1, 2) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1) - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 2.$$

Since the reduced characteristic polynomial has all positive coefficients, the equilibrium position $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ asymptotically stable.

Task 6.
Find the electric field generated by a metal sphere of radius R and electric charge e.
SOLUTION. $E = \dfrac{e}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$

Task 7.
Determine the energy spectrum of a quantum system whose classical limit is described by the following Lagrangian:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\alpha^2}{2}(4x^2 + 2xy + 4y^2).$$

SOLUTION.

Task 8.
A spatial pendulum with a bob of mass m is suspended from a fixed point by a massless rigid rod of length l. Suppose that the system is in a uniform gravitational field.

a Determine the Lagrangian of the system in spherical coordinates.

b Find the Euler—Lagrange equations.

c Identify two independent conserved quantities.

SOLUTION.