

Олимпиада Ломоносов 2020-2021 учебный год
Робототехника. Заочный этап
8-9 класс

Задача 1. (10 баллов)

Робот едет по прямолинейной трассе. Первую половину времени он ехал со скоростью 3 см/с, а вторую – со скоростью в 2 см/с. Длина восьмой части трассы равна 7,5 дециметрам. Определите, за какое время робот проехал трассу полностью. Ответ дайте в минутах. В ответ запишите только число.

Ответ: 4

Решение:

Определим длину трассы:

$$7,5 \times 8 = 60 \text{ (дм)}$$

$$60 \text{ дм} = 600 \text{ см}$$

Составим уравнение движения, обозначив за x половину времени движения робота:

$$3x + 2x = 600$$

$$x = 120 \text{ (с)}$$

Посчитаем время движения робота в минутах:

$$120 \times 2 = 240 \text{ (с)}$$

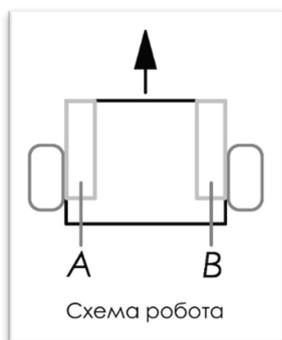
$$240 : 60 = 4 \text{ (мин.)}$$

Ответ: 4 минуты

Задача 2 (15 баллов)

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиусы колёс робота равны. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Расстояние между центрами колес робота равно 30 см. Длина обода колеса равна 5 см. В центре колесной базы робота закреплен маркер, которым робот может наносить изображение.

Робот чертит с помощью маркера окружность таким образом, что колесо А оказывается внутри окружности. Определите, за какое время робот начертит окружность полностью, если за 1 секунду ось мотора В поворачивается на 90 градусов. Мотор А выключен. При расчетах примите $\pi \approx 3$. Ответ дайте в секундах. В ответ запишите только число.



Ответ: 144

Решение:

Поскольку мотор А выключен, а мотор В включен, то робот будет колесом В описывать окружность вокруг колеса А. Радиус окружности, которую будет описывать робот колесом В будет равен 30 см.

Определим скорость вращения оси мотора В:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} \times 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c}\right)$$

Определим время, за которое робот совершит колесом В один полный оборот вокруг колеса А:

$$\frac{2\pi \times 30 \text{ см}}{5 \text{ см} \times \frac{1}{4} \frac{1}{c}} = 2 \times 3 \times 6 \times 4 \text{ с} = 144 \text{ с}$$

Ответ: 144 с

Задача 3. (15 баллов)

Информационная панель робототехнического полигона содержит шестнадцать ярких светодиодов, каждый из которых можно включать и выключать отдельно. На панели находятся светодиоды трех цветов (см. *Схему расположения светодиодов*).

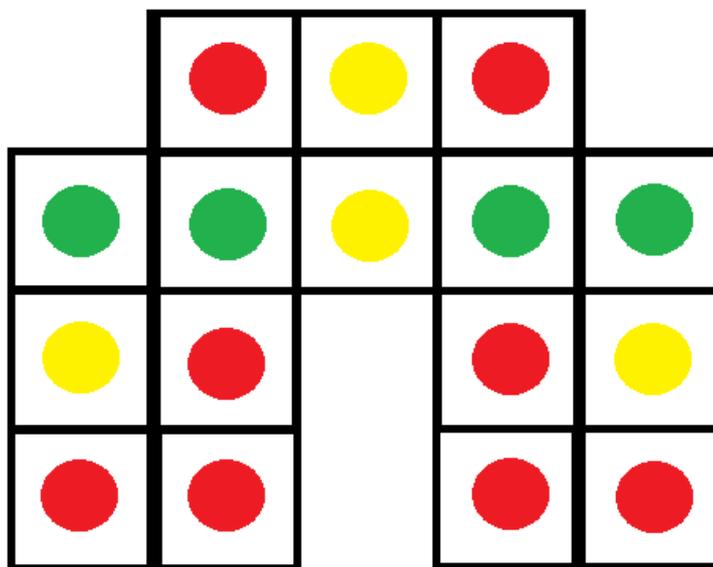


Схема расположения светодиодов

Данную панель решили использовать для жеребьевки. В начале соревнования все светодиоды были выключены. Затем на панели случайным образом зажгли один светодиод. Определите, сколько бит информации содержит сообщение, если на панели горит один зеленый светодиод. В ответ запишите только число.

Ответ: 2

Решение:

Найдем количество информации, содержащейся в сообщении, воспользовавшись вероятностным подходом.

Вероятность того, что загорится зеленый светодиод, будет равна:

$$P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Одному биту информации соответствует выбор, после которого неопределенность уменьшается в два раза.

Так как

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

то нам нужно сделать 2 таких выбора. Значит, сообщение содержит 2 бита.

Воспользовавшись формулой, можно получить аналогичный результат:

$$i = \log_2\left(\frac{1}{P}\right) = \log_2\left(\frac{1}{0,25}\right) = \log_2(4) = 2 \text{ бита}$$

Ответ: 2 бита

Задача 4. (20 баллов)

Работая над ремонтом крыши сарая, Саша решила использовать для подъема тяжестей следующую систему блоков – полиспаст (См. *Схему полиспаста*).

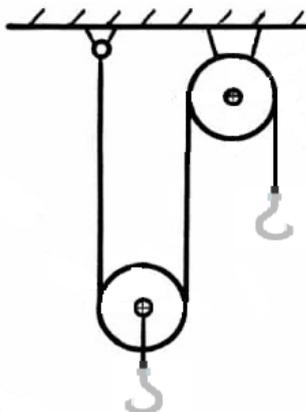


Схема полиспаста

Саше нужно поднять груз массой 1 ц. На крыше оказалась упаковка грунтовок, масса которой чуть больше 10 кг. Саша решила использовать ее в качестве противовеса, чтобы поднять объект большей массы, которым можно будет воспользоваться в качестве противовеса при следующем применении полиспаста и так далее.

В сарае Саша нашла следующие предметы, которые можно использовать в качестве противовесов:

№	Название	Масса (кг)
1	Грунтовка морозостойкая	10
2	Клей для керамогранита. Эконом упаковка	50
3	Клей для плитки высокоэластичный	25
4	Пескобетон М-300	40
5	Пол наливной универсальный	20
6	Сухая смесь М-200 монтажно-кладочная 2 в 1	80
7	Шпатлевка финишная полимерная	20
8	Штукатурка гипсовая универсальная серая	30

Наибольшая масса, которую Саша может перенести на крышу вручную, равна 8 кг. После использования полиспаста грузы можно отцепить от него. К любому из крюков одновременно можно прикрепить только один груз.

Массой блоков и силой трения в осях блоков можно пренебречь.

Какое минимальное количество раз Саше нужно будет воспользоваться полиспастом, чтобы поднять на крышу груз массой 1 ц? В ответе укажите только число.

Ответ: 4

Решение:

Нам нужно поднять груз массой 1 ц или 100 кг.

Использование подвижного блока позволяет уменьшить силу, необходимую для перемещения подвешенного к нему груза в 2 раза.

Значит, используя груз в 10 кг в качестве противовеса, можно поднять на крышу груз в 20 кг. Чтобы груз поднялся, противовес можно подтолкнуть. Поскольку нет трения в блоках, то грузы будут двигаться – противовес опускаться, а груз подниматься.

Подняв груз в 20 кг, используем его в качестве противовеса, чтобы поднять груз в 40 кг.

Подняв груз в 40 кг, используем его в качестве противовеса, чтобы поднять груз в 80 кг.

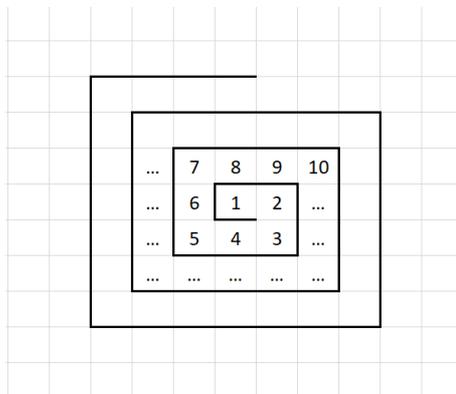
Подняв груз в 80 кг, используем его в качестве противовеса, чтобы поднять наш груз в 100 кг.

Таким образом, Саше нужно 4 раза воспользоваться полиспастом.

Ответ: 4 раза.

Задача 5. (20 баллов)

Робот-пылесос убирает клетчатый пол, двигаясь по спирали. За единицу времени робот убирает одну клетку и перемещается на следующую клетку. Таким образом, робот убирает все помещение. Часть спирали, по которой движется робот, изображена на рисунке:



Определим, на какой клетке окажется робот после очередного витка

Робот стартует с клетки под номером 1.

На первом витке: $1 + (1 + 1 + 2 + 2) = 1 + 2 \times (1 + 2) = 1 + 6 = 7$

На втором витке: $7 + (3 + 3 + 4 + 4) = 1 + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 1 + 20 = 21$

На третьем витке: $21 + (5 + 5 + 6 + 6) = 1 + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 43$

На n-ом витке: $1 + 2 \times \sum_{i=1}^{2n} i$

Сумму арифметической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$S_i = \frac{a_1 + a_i}{2} \times i = \frac{a_1 + a_1 + d(i-1)}{2} \times i = \frac{2a_1 + d(i-1)}{2} \times i$$

Подставим в формулу наши значения:

$$a_1 = 1, d = 1, i = 2n$$

$$S_{2n} = \frac{2 \times 1 + 1 \times (2n - 1)}{2} \times 2n = n(2 + 2n - 1) = n(2n + 1)$$

Таким образом, на n-ом витке:

$$2n(2n + 1) + 1$$

Посчитаем, на какой клетке робот окажется после очередного витка:

При n = 4: $2 \times 4 \times (2 \times 4 + 1) + 1 = 8 \times 9 + 1 = 73$

При n = 5: $2 \times 5 \times (2 \times 5 + 1) + 1 = 10 \times 11 + 1 = 111$

При n = 6: $2 \times 6 \times (2 \times 6 + 1) + 1 = 12 \times 13 + 1 = 157$

При n = 7: $14 \times 15 + 1 = 211$

При n = 8: $16 \times 17 + 1 = 273$

При n = 8: $16 \times 17 + 1 = 273$

При n = 9: $18 \times 19 + 1 = 343$

При n = 10: $20 \times 21 + 1 = 421$

При n = 11: $22 \times 23 + 1 = 507$

При n = 12: $24 \times 25 + 1 = 601$

Получается, что по окончании 12 витка робот окажется ровно в 601 клетке

Тот же результат можно было получить и вторым способом.

Робот находится на 601 клетке. Определим, на каком по номеру витке он находится:

$$601 = 1 + 2 \times \sum_{i=1}^{2n} i$$

$$600 = 2 \times \sum_{i=1}^{2n} i$$

$$\sum_{i=1}^{2n} i = 300$$

Сумму арифметической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$S_i = \frac{a_1 + a_i}{2} \times i = \frac{a_1 + a_1 + d(i-1)}{2} \times i = \frac{2a_1 + d(i-1)}{2} \times i$$

Подставим в формулу наши значения:

$$a_1 = 1, d = 1, i = 2n$$

$$S_{2n} = \frac{2 \times 1 + 1 \times (2n - 1)}{2} \times 2n = n(2 + 2n - 1) = n(2n + 1)$$

Составим уравнение относительно n:

$$n(2n + 1) = 300$$

$$2n^2 + n - 300 = 0$$

$$D = 1 + 4 \times 2 \times 300 = 2401$$

$$n_1 = \frac{-1 - 49}{4} = -12,5 \text{ — не подходит по условию (} n \text{ — натуральное)}$$

$$n_2 = \frac{-1 + 49}{4} = 12$$

По окончании 12 витка робот окажется в клетке, которая находится на диагонали, которая проходит через левый верхний угол и центр спирали.

Робот окажется выше и левее клетки старта.

По окончании первого витка робот оказался на пересечении 2 горизонтальной и 2 вертикальной линии. По окончании 2 витка робот оказался на пересечении 3 горизонтальной и 3 вертикальной линии. Таким образом, после каждого витка робот передвигается на 1 линию «выше центра» и на 1 линию «левее центра».

Таким образом, после 12 витка робот окажется на пересечении 13 вертикальной и 13 горизонтальной линии.

Ответ:

13 выше центра

13 левее центра