

**№1 (20 баллов)** Человек ездит на одноколёсном велосипеде по кругу. При этом точка контакта колеса с опорой  $K$  перемещается вдоль окружности радиуса  $R = 2$  м с постоянной линейной скоростью  $V = 2$  м/с. Во время движения велосипедист наклонен точно в сторону центра круга. При этом отрезок  $KC = 50$  см, соединяющий точку  $K$  с центром масс  $C$  человека, образует с горизонтальной плоскостью постоянный угол  $\alpha = 60^\circ$ . Найти скорость, с которой перемещается центр масс  $C$  человека.

**Ответ и решение:**

Время  $T$ , в течение которого велосипедист совершает один полный оборот по кругу, равно

$$T = \frac{2\pi R}{V}.$$

Радиус  $r$  окружности, вдоль которой движется центр масс  $C$  велосипедиста, равен

$$r = R - l \cos \alpha.$$

Длина этой окружности равна

$$2\pi r = 2\pi(R - l \cdot \cos \alpha).$$

Центр масс  $C$  совершает оборот по кругу в течение того же времени  $T$ , поэтому скорость  $v$  движения центра масс  $C$  равна

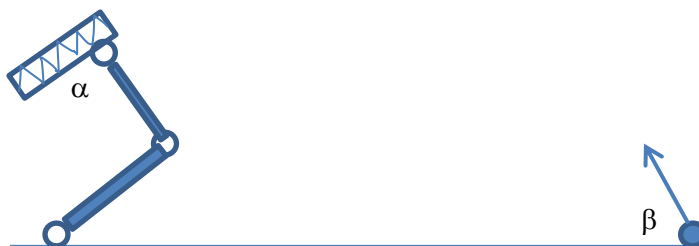
$$v = \frac{2\pi(R - l \cdot \cos \alpha)}{T} = \frac{V 2\pi(R - l \cdot \cos \alpha)}{2\pi R} = V \left( 1 - \frac{l}{R} \cdot \cos \alpha \right).$$

$$v = 2 \times \left( 1 - \frac{0,5}{2} \times \cos(60^\circ) \right) = 2 \times \left( 1 - \frac{1}{8} \right) = 1,75 \text{ (м/с)}$$

Ответ:  $v = 1,75$  м/с.

**№2 (30 баллов)** Робот ловит шарик, вылетающий из точки, расположенной на расстоянии  $s = 2$  м на той же высоте, что и основание робота. Шарик вылетает со скоростью  $5$  м/с под углом  $60^\circ$  относительно горизонта.

Ловушка для шарика представляет собой трубу, в которую шарик залетит только если верхний конец ловушки окажется на траектории движения шарика, а направление движения в точности совпадает с направлением трубы. В какой точке относительно своего основания робот должен поместить верхнюю точку ловушки, если имеется требование, что она должна располагаться под углом  $45^\circ$  к горизонту? В ответе укажите координаты точки. Ускорение силы тяжести принять  $10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.



**Ответ и решение:**

Начальная скорость шарика

$$(V_x, V_y) = (V \cos \beta, V \sin \beta)$$

Текущая скорость

$$v_x = V_x, \quad v_y = V_y - gt$$

Текущая координата

$$x_t = s - V_x t, \quad y_t = V_y t - \frac{gt^2}{2}$$

Угол касательной к траектории

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{V_y - gt}{V_x}$$

Отсюда находится время встречи

$$t_1 = \frac{V_x \operatorname{tg} \alpha + V_y}{g}$$

Далее координаты, при заданных значениях углов

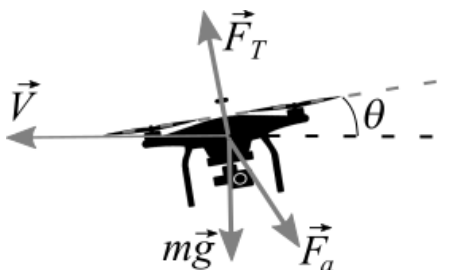
$$V_x = \frac{1}{2} V, \quad V_y = \frac{\sqrt{3}}{2} V, \quad t_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \frac{V}{g}, \quad x_1 = s - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \frac{V^2}{g}, \quad y_1 = \frac{V^2}{4g}$$

$$x_1 = 2 - \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \times \frac{25}{10} \approx 0,29 \text{ (м)}$$

$$y_1 = \frac{25}{4 \times 10} = 0,625 \text{ (м)}$$

Ответ  $x_1 = 0,29 \text{ м}, y_1 = 0,625 \text{ м}$

**№3 (30 баллов)** Квадрокоптер массой  $m = \sqrt{2}$  кг летит по горизонтали с постоянной скоростью  $V = 5$  м/с. Его корпус наклонен к горизонту, так что угол между плоскостью, в которой расположены винты, составляет с горизонтом угол  $\theta$ .



Суммарная сила тяги  $F_T$ , развиваемая винтами квадрокоптера, в каждый момент времени направлена перпендикулярно плоскости винтов. На квадрокоптер действует также сила сопротивления среды  $F_a$ , направленная против вектора скорости центра масс и равная  $cV^2$  (где  $c = 0,2$  кг/м – некоторый коэффициент, который мы для простоты будем считать постоянным).

Найти тягу, создаваемую винтами квадрокоптера при таком движении, а также угол  $\theta$ . Ускорение силы тяжести принять  $10$  м/с<sup>2</sup>.

### Ответ и решение:

Спроектируем силы на горизонталь и вертикаль, учитывая, что движение равномерное и вращения нет:

$$0 = -F_a + F_T \sin \theta$$

$$0 = -mg + F_T \cos \theta$$

Отсюда:

$$F_T = \sqrt{c^2 V^4 + m^2 g^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{cV^2}{mg}$$

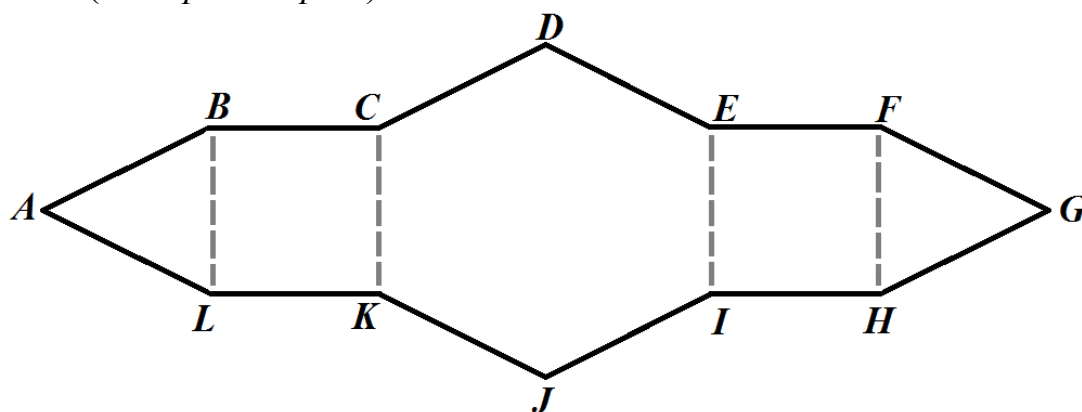
Посчитаем

$$F_T = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times 5^4 + 2 \times 100} = \sqrt{25 + 200} = 15(\text{Н})$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{0,2 \times 25}{\sqrt{2} \times 10}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 19,47^\circ$$

Ответ:  $F_T = 15$  Н,  $\theta \approx 19,47^\circ$

**№4 (25 баллов)** Робот движется по ровной горизонтальной поверхности по линии (см. *траекторию*).



*Траектория*

Траектория представляет собой многоугольник  $ABCDEFGHIJKL$ , составленный из отрезков двух равносторонних треугольников  $ABL$  и  $FHG$ , двух квадратов  $BCKL$  и  $EFHI$  и правильного шестиугольника  $CDEIJK$ .

Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс составляет 15 см, радиус колеса робота равен 5 см. Чтобы проехать прямолинейный участок  $AB$  каждое из колёс робота должно совершить 10 полных оборотов.

Все повороты робот должен совершать на месте, вращая колёса с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Робот не может ехать назад. При расчетах примите  $\pi \approx 3$ .

**А) (10 баллов)** Определите путь, который должен проехать робот, если по заданию всю траекторию нужно проехать 5 раз. Ответ дайте в метрах.

**Б) (15 баллов)** Определите, чему равен минимальный суммарный угол поворота робота, если робот проехал по многоугольнику  $ABCDEFGHIJKL$  полностью один раз. Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление углов поворотов робота не учитывается. Ответ дайте в градусах.

**Ответ и решение:**

А) Сторона многоугольника равна:

$$AB = 2 \times \pi \times 5 \times 10 \approx 3 \times 100 = 300 \text{ (см)}$$

$$300 \text{ см} = 3 \text{ м}$$

Периметр многоугольника равен:

$$P = 3 \times 12 = 36 \text{ (м)}$$

Длина трассы равна:

$$L = 36 \times 5 = 180 \text{ (м)}$$

Ответ: 180 м

Б) Чтобы суммарный угол поворота был минимален, нужно стартовать из вершины угла, градусная мера которого наименьшая. Соответственно, нужно стартовать из вершин  $A$  или  $G$ .

Посчитаем величину угла правильного шестиугольника:

$$\frac{(6 - 2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого меньше  $180^\circ$ , то величина угла поворота будет равна разности  $180^\circ$  и величины угла.

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого больше  $180^\circ$ , то величина угла поворота будет равна разности величины угла и  $180^\circ$ .

Суммарный угол поворота робота можно вычислить следующим образом:

$$30^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 480^\circ$$

Ответ:  $480^\circ$