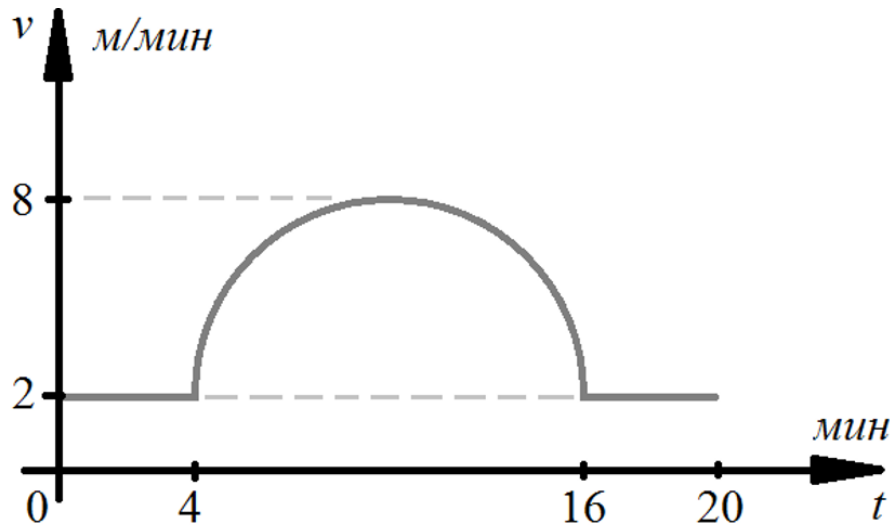


Задания отборочного этапа олимпиады школьников "Ломоносов" по
робототехнике 2019/2020,
10-11 классы
Задания и решения

№1 График зависимости скорости робота от времени имеет следующий вид:



С 4 по 16 минуту график имеет вид полуокружности. Максимальная скорость робота равна 8 м/мин. Определите путь, пройденный роботом за 20 минут. В расчетах примите $\pi \approx 3,14$. Ответ дайте в метрах. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 96,5 м

Решение:

Путь, пройденный телом, равен площади под графиком зависимости скорости от времени.

Соответственно, площадь можно равна:

$$\begin{aligned} S &= 2 \frac{\text{м}}{\text{мин}} \times 20 \text{ мин} + \frac{\pi}{2} \times \frac{(16 \text{ мин} - 4 \text{ мин})}{2} \times \left(8 \frac{\text{м}}{\text{мин}} - 2 \frac{\text{м}}{\text{мин}} \right) \\ &= 40 \text{ м} + \pi \times 3 \times 6 \text{ м} = 40 + 18\pi \approx 40 + 56,52 \approx 96,5 \text{ м} \end{aligned}$$

Ответ: 96,5 м

№2 Средняя скорость работа на первой половине пути на 12 см/с больше, чем на второй половине пути. Средняя путевая скорость работа на всем пути равна $A = 5$ см/с. Определите, чему равно отношение времени, за которое робот преодолел первую половину пути, ко времени, за которое робот преодолел вторую половину пути. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 0,2

Решение:

Введем обозначения:

$$\frac{2S}{t_1 + t_2} = 5 \quad (1)$$

$$\frac{S}{t_1} = \frac{S}{t_2} + 12 \quad (2)$$

Выразим в первом уравнении величину $2S$:

$$2S = 5(t_1 + t_2)$$

Умножим второе уравнение на $2t_1t_2$ (поскольку по условию $t_1 > 0, t_2 > 0$):

$$2St_2 = 2St_1 + 24t_1t_2$$

$$2S(t_2 - t_1) = 24t_1t_2$$

Проведем замену во втором уравнении из первого уравнения:

$$5(t_1 + t_2)(t_2 - t_1) = 24t_1t_2$$

$$5(t_2^2 - t_1^2) = 24t_1t_2$$

Раздели данное уравнение на t_2^2 :

$$5\left(1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2\right) = 24\frac{t_1}{t_2}$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{t_1}{t_2}$$

$$5(1 - \gamma^2) = 24\gamma$$

$$5\gamma^2 + 24\gamma - 5 = 0$$

Корнями данного уравнения являются $\gamma_1 = -5$ (не подходит по условию задачи) и $\gamma_1 = 0,2$.

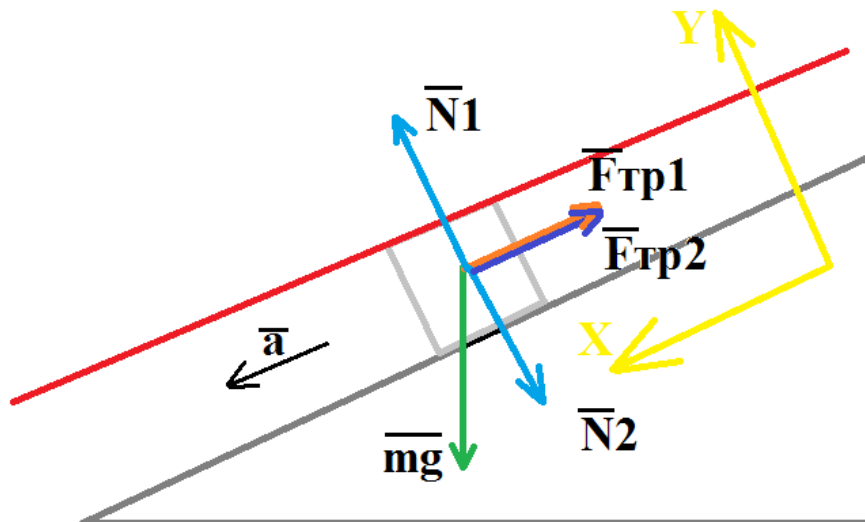
Ответ: 0,2.

№ 3 Брусок массы $m=2$ кг соскальзывает с наклонной плоскости с постоянным ускорением $a=2$ м/с². Угол при основании наклонной плоскости равен $\alpha=30^\circ$. Сверху брусок накрывают еще одной плоскостью, параллельной наклонной. Коэффициенты трения скольжения между бруском и плоскостями одинаковы и равны $\mu=0,2$. Определите, с какой силой нужно прижать брусок верхней плоскостью, чтобы он далее двигался с постоянной скоростью. Ответ дайте в ньютонах.

Ответ: 10 Н

Решение:

Сделаем рисунок и рассмотрим, что же происходит в данной задаче:



До того, как брусок прижали сверху плоскостью, мы имели:

$$\vec{N}_1 + \vec{mg} + \vec{F}_{\text{тр}1} = \vec{ma}$$

Распишем по проекциям на оси:

$$\text{OX: } 0 + mg \sin \alpha - F_{\text{тр}1} = ma$$

$$\text{OY: } N_1 - mg \cos \alpha + 0 = 0$$

Отсюда получаем:

$$N_1 = mg \cos \alpha$$

Таким образом получаем:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$$

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

После того, как брусок прижали сверху плоскостью, ускорение тела станет равно 0:

$$\overrightarrow{N1} + \overrightarrow{N2} + \overrightarrow{mg} + \overrightarrow{F_{\text{тр}2}} = 0$$

Распишем по проекциям на оси:

$$\text{OX: } 0 + 0 + mg \sin \alpha - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = 0$$

$$\text{OY: } N1 - N2 - mg \cos \alpha + 0 = 0$$

Далее получаем:

$$N1 = N2 + mg \cos \alpha$$

Учтем

$$F_{\text{тр}1} = \mu N1 = \mu (N2 + mg \cos \alpha)$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu N2$$

Получаем:

$$mg \sin \alpha - \mu (N2 + mg \cos \alpha) - \mu N2 = 0$$

$$mg \sin \alpha = \mu N2 + \mu N2 + \mu mg \cos \alpha = 2\mu N2 + \mu mg \cos \alpha$$

$$2\mu N2 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$$

$$2\mu N2 = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$2\mu N2 = ma$$

$$N2 = \frac{ma}{2\mu} = \frac{2 \text{ кг} \times 2 \text{ м/с}^2}{2 \times 0,2} = 10 \text{ Н}$$

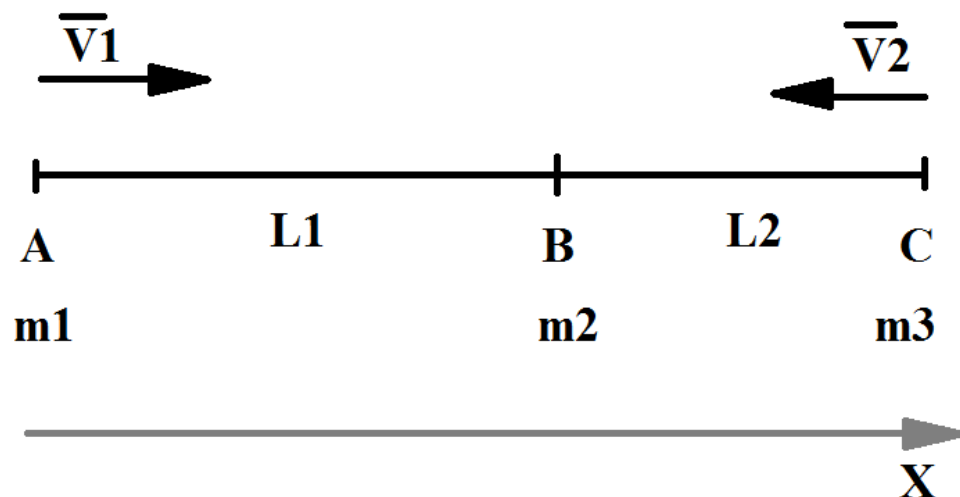
Ответ: 10 Н.

№4. На прямой находятся три тележки: А, В, С с массами $m_1=5$ кг, $m_2=1$ кг, $m_3=2$ кг, соответственно. Тележка В находится между двумя другими. Вначале расстояние АВ равно 12,5 м, а расстояние ВС равно $L_2 = 7,5$ м. Тележкам А и С сообщают скорости $v_1=3$ м/с и $v_2=2$ м/с, направленные в сторону третьей тележки. Определить, какое расстояние пройдет средняя тележка до остановки, считая удары абсолютно неупругими. Коэффициент трения между тележками и опорой равен $f=0,02$. Ускорение свободного падения примите равным $g \approx 10$ м/с². Ответ дайте в метрах.

Ответ: 2,5 м

Решение:

Сделаем чертеж:



На все тележки во время их движения будет действовать сила трения скольжения, которая будет сообщать тележкам ускорение, тормозящее тележки:

$$a = fg \approx 0,02 \times 10 \approx 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Проверим, какая из тележек достигнет А или С достигнет тележки В быстрее. Для этого рассчитаем время, за которое тележки проедут соответствующие расстояния:

$$L_1 = 0 + v_1 t_1 - \frac{at_1^2}{2}$$

$$L2 = 0 + v2 t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

Решим первое уравнение в числах:

$$0,1 t_1^2 - 3t_1 + 12,5 = 0$$

Получаем два корня 5 с и 25 с. Второй корень (25 с) показывает, что если тело будет двигаться с таким постоянным ускорение, то через 25 секунд оно снова окажется на расстоянии 12,5 метров, когда будет ехать обратно. Соответственно, нам это решение (25 с) не подходит, и мы его отбрасываем.

Остается $t_1 = 5$ с

Решим второе уравнение в числах:

$$0,1 t_1^2 - 2t_1 + 7,5 = 0$$

Получаем два корня 5 с и 15 с. Второй корень (15 с) показывает, что если тело будет двигаться с таким постоянным ускорение, то через 15 секунд оно снова окажется на расстоянии 7,5 метров, когда будет ехать обратно. Соответственно, нам это решение (15 с) не подходит, и мы его отбрасываем.

Остается $t_2 = 5$ с

Таким образом, мы установили, что тележки А и С достигнут тележки В одновременно.

Рассчитаем скорости, которые будут у тележек А и С перед столкновением с тележкой В:

$$v1' = v1 - at_1 = 3 - 0,2 \times 5 = 3 - 1 = 2 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

$$v2' = v2 - at_2 = 2 - 0,2 \times 5 = 2 - 1 = 1 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

После того, как тележки А и С столкнутся с тележкой В, они прилипнут к ней и дальше будут двигаться как единое целое.

Запишем уравнение сохранения импульса для абсолютно неупругого удара тележек А и С, которые одновременно прилипают к тележке В в проекции на ось ОХ:

$$m1 v1' + 0 - m3 v2' = (m1 + m2 + m3)v$$

Получаем

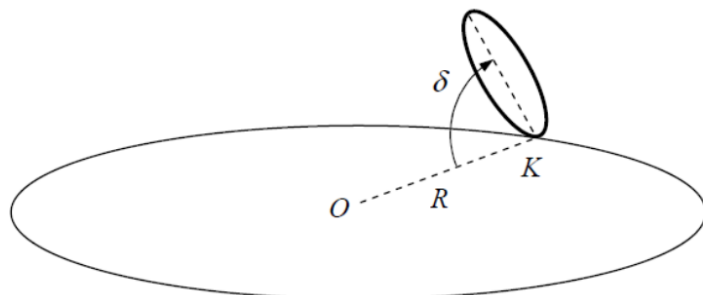
$$v = \frac{m_1 v_1' - m_3 v_2'}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{5 \times 2 - 2 \times 1}{5 + 1 + 2} = \frac{10 - 2}{8} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Определим, какое расстояние проедет получившаяся тележка до остановки:

$$S = \frac{v'^2 - v^2}{2a} = \frac{0 - 1}{2 \times (-0,2)} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ м}$$

Ответ: $S = 2,5 \text{ м}$.

№5 Колесо радиуса $r=1$ м катится без проскальзывания по горизонтальной опорной поверхности так, что точка касания его с опорой К описывает окружность радиуса $R=6$ м с центром в точке О ($OK=R$). Плоскость колеса наклонена к опорной плоскости под углом $\delta=60^\circ$ (см. Рисунок).



Рисунок

По какой кривой движется при этом центр колеса? Как она расположена в пространстве? Какова скорость движения центра колеса, если точка контакта К движется по окружности с постоянной скоростью $v=0,12$ м/с? Ответить на те же вопросы относительно верхней точки колеса.

Ответ:

Траекторией, составленной из положений центра колеса, будет окружность, лежащая в плоскости, параллельная горизонтальной опорной поверхности.

Радиус этой окружности будет равен

$$R_{\text{центра}} = R - r \cos \delta = 6 - 1 \times \cos 60^\circ = 6 - 1 \times 0,5 = 5,5 \text{ м}$$

Рассчитаем скорость движения положений центра колеса:

$$V_{\text{центра}} = \frac{v \times (R - r \cos \delta)}{R} = \frac{0,12 \times 5,5}{6} = 0,11 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Траекторией, составленной из положений верхних точек колеса, будет окружность, лежащая в плоскости, параллельная горизонтальной опорной поверхности. Радиус этой окружности будет равен

$$R_{\text{верх}} = R - 2r \cos \delta = 6 - 2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 6 - 2 \times 0,5 = 5 \text{ м}$$

Рассчитаем скорость движения положений центра колеса:

$$V_{\text{верх}} = \frac{v \times (R - 2r \cos \delta)}{R} = \frac{0,12 \times 5}{6} = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$