Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями

1.1. (2 балла) На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 5 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

Ответ: 30.

Решение. Если x — число книг на обеих полках, то $\frac{x}{3}+5=\frac{2x}{3}-5$, откуда $x=30$.

1.2. На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 6 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

Ответ: 36.

1.3. На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 7 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

Ответ: 42.

1.4. На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 8 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

Ответ: 48.

2.1. (14 баллов) На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 22, мастерами — 47, а среднее число очков во всей команде — 41. Какова доля (в процентах) мастеров в этой команде?

Ответ: 76.

Решение. Пусть в команде x юниоров и y мастеров. Тогда общее число очков, набранных командой, равно $22x+47y=41(x+y)$, откуда находим $19x=6y$. Поэтому доля мастеров равна $\frac{y}{x+y}=\frac{19y}{19x+19y}=\frac{19y}{25y}=0{,}76$, т. е. 76%.

2.2. На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 22, мастерами — 47, а среднее число очков во всей команде — 41. Какова доля (в процентах) юниоров в этой команде?

Ответ: 24.

2.3. На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 23, мастерами — 48, а среднее число очков во всей команде — 30. Какова доля (в процентах) мастеров в этой команде?

Ответ: 28.

2.4. На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 23, мастерами — 48, а среднее число очков во всей команде — 30. Какова доля (в процентах) юниоров в этой команде?

Ответ: 72.

3.1. (14 баллов) Вычислите $x^3+\frac{1}{x^3}$, если известно, что $x+\frac{1}{x}=3$.

Ответ: 18.

Решение. Если $x+\frac{1}{x}=a$, то $a^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}$, откуда $x^3+\frac{1}{x^3}=a^3-3a=18$.

3.2. Вычислите $x^3+\frac{1}{x^3}$, если известно, что $x+\frac{1}{x}=4$.

Ответ: 52.

3.3. Вычислите $x^3-\frac{1}{x^3}$, если известно, что $x-\frac{1}{x}=2$.

Ответ: 14.

3.4. Вычислите $x^3-\frac{1}{x^3}$, если известно, что $x-\frac{1}{x}=3$.

Ответ: 36.

4.1. (14 баллов) Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей, а 2 ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластиков, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 520.

Решение. Из условия следует, что 3 ластика, 8 ручек и 6 фломастеров стоят $440+240=680$ рублей. Кроме того, 2 ластика, 6 ручек и 4 фломастера обойдутся в $2\cdot 240=480$ рублей. Значит, одна ручка стоит $480-440=40$ рублей. Тогда 3 ластика, 4 ручки и 6 фломастеров стоят $680-4\cdot 40=520$ рублей.

4.2. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 250 рублей, а 3 ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 690 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластиков, 9 ручек и 8 фломастеров?

Ответ: 820.

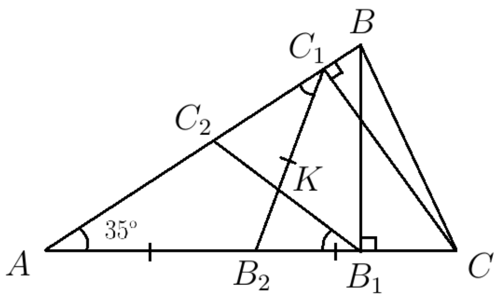
4.3. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей, а 2 ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 420 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластиков, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 490.

4.4. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей, а 3 ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 620 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластиков, 9 ручек и 8 фломастеров?

Ответ: 710.

5.1. (14 баллов) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $35°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.



Ответ: 75.

Решение. Заметим, что углы B и C треугольника ABC больше, чем $\angle A=35°$ (в противном случае он был бы тупоугольным), поэтому точка C_1 лежит на стороне AB между точками B и C_2, а точка B_1 лежит на стороне AC между точками C и B_2. Поэтому точка K пересечения прямых B_1C_2 и C_1B_2 лежит внутри треугольника. Поскольку C_1B_2 — медиана прямоугольного треугольника CC_1A, треугольник C_1B_2A равнобедренный. Следовательно, $\angle AB_1C_2=35°$. Аналогично получаем $\angle AC_1B_2=35°$, откуда $\angle AB_2C_1=180°-2\cdot 35°=110°$. Тогда $\angle B_1KB_2=\angle AB_2K-\angle AB_1K=110°-35°=75°$.

5.2. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 25°, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2.

Ответ: 105.

5.3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 40°, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.

Ответ: 60.

5.4. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 20°, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла C_1KC_2.

Ответ: 120.

6.1. (14 баллов) В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 16 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 17 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 15.

Решение. Житель племени Ах не может сказать «все мы из племени Ух», поэтому первый из племени Ух. Значит, в хижине не меньше 17 человек. Поэтому второй сказал правду, т. е. он из племени Ах. Значит, в хижине не больше 17 человек. Таким образом, в хижине 17 человек. Третий — из племени Ух, так как сказал что всего их пятеро. Но поскольку он сказал, что жителей племени Ух не меньше трёх, их не более двух. Двое уже нашлись (третий и первый), поэтому их ровно 2. Тогда жителей из племени Ах 15 человек.

6.2. В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 10 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 11 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 9.

6.3. В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 13 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 14 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 12.

6.4. В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 18 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 19 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 17.

7.1. (14 баллов) Найдите наибольшее из целых значений a, при которых уравнение

$$(x-a)(x-7)+3=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: 11.

Решение. При искомых значениях a числа $x-a$ и $x-7$ целые, а их произведение равно -3, поэтому возможны 4 случая:

$$\begin{cases} x-a=1, \\ x-7=-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-a=3, \\ x-7=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-a=-1, \\ x-7=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-a=-3, \\ x-7=1, \end{cases}$$

откуда находим соответственно

$$\begin{cases} a=3, \\ x=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=3, \\ x=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=11, \\ x=10; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=11, \\ x=8. \end{cases}$$

Значит, искомыми значениями являются $a=3$ и $a=11$, из которых наибольшее равно 11.

7.2. Найдите наибольшее из целых значений a, при которых уравнение $(x-a)(x-9)+3=0$ имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: 13.

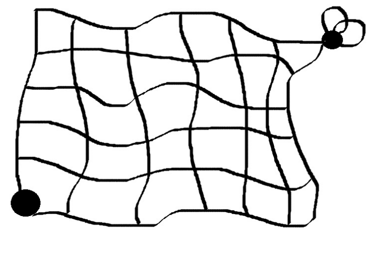
7.3. Найдите наименьшее из целых значений a, при которых уравнение $(x-a)(x+8)+5=0$ имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: -14.

7.4. Найдите наименьшее из целых значений a, при которых уравнение $(x-a)(x+9)+5=0$ имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: -15.

8.1. (14 баллов) Целеустремлённый паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?

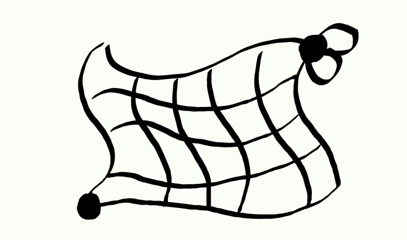


Ответ: 462.

Решение. Для достижения цели пауку нужно сделать 5 шагов вверх и 6 шагов вправо, т. е. в общей сложности 11 шагов. Искомое число способов добраться до мухи равно числу различных способов выбрать 5 шагов вверх из возможных 11, т. е. всего $\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5!}=462$ способа (это число называется числом сочетаний без повторений из 11 элементов по 5 и обозначается C_{11}^5).

Ответ можно получить также, последовательно подписывая возле узлов паутины (начиная с ближайших к пауку), сколькими способами в них можно попасть; получится фрагмент так называемого *треугольника Паскаля*, который образуют числа C_n^k, $k=0,1,\ldots,n$.

8.2. Целеустремленный паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?



Ответ: 126.