

**Решения заданий заключительного этапа
Олимпиады «Ломоносов» по инженерным наукам 2018/2019
10-11 классы**

Задача 1.3 (25 баллов)



Рисунок 1

В упрощенном виде схему рефрактометра можно представить так, как показано на рисунках (рис. 1 и 2). Свет от источника, находящегося на левой грани призмы, через призму, изготовленную из стекла с показателем преломления $n_{\text{ст}} = 2$, попадает на поверхность исследуемого раствора и, в зависимости от того, достигнут ли угол полного внутреннего отражения или нет, либо полностью отражается от поверхности, либо частично попадает в

раствор. Положение границы света и тени зависит от показателя преломления раствора.

В качестве исследуемого раствора взяли раствор, содержащий 56,8 г воды и 14,2 г хлорида кальция, и зафиксировали положение границы света и тени. Затем в раствор добавили гексагидрат хлорида кальция, содержащий 0,53 г водорода. Оцените, на какое расстояние сместится граница света и тени. Зависимость показателя преломления водного раствора хлорида кальция от его концентрации представлена на графике (рис. 3).

Данные, необходимые для решения задачи, указаны на рисунке 2: $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 45^\circ$.

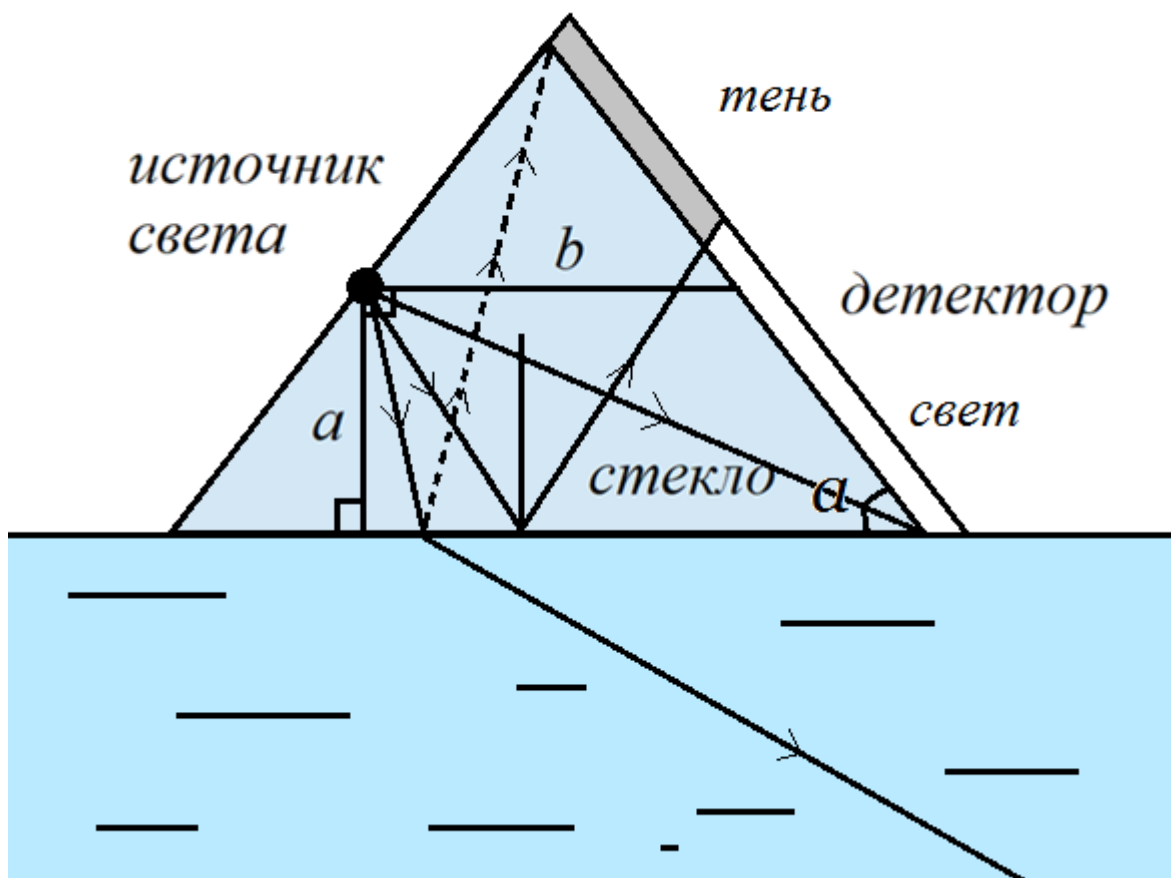


Рисунок 2

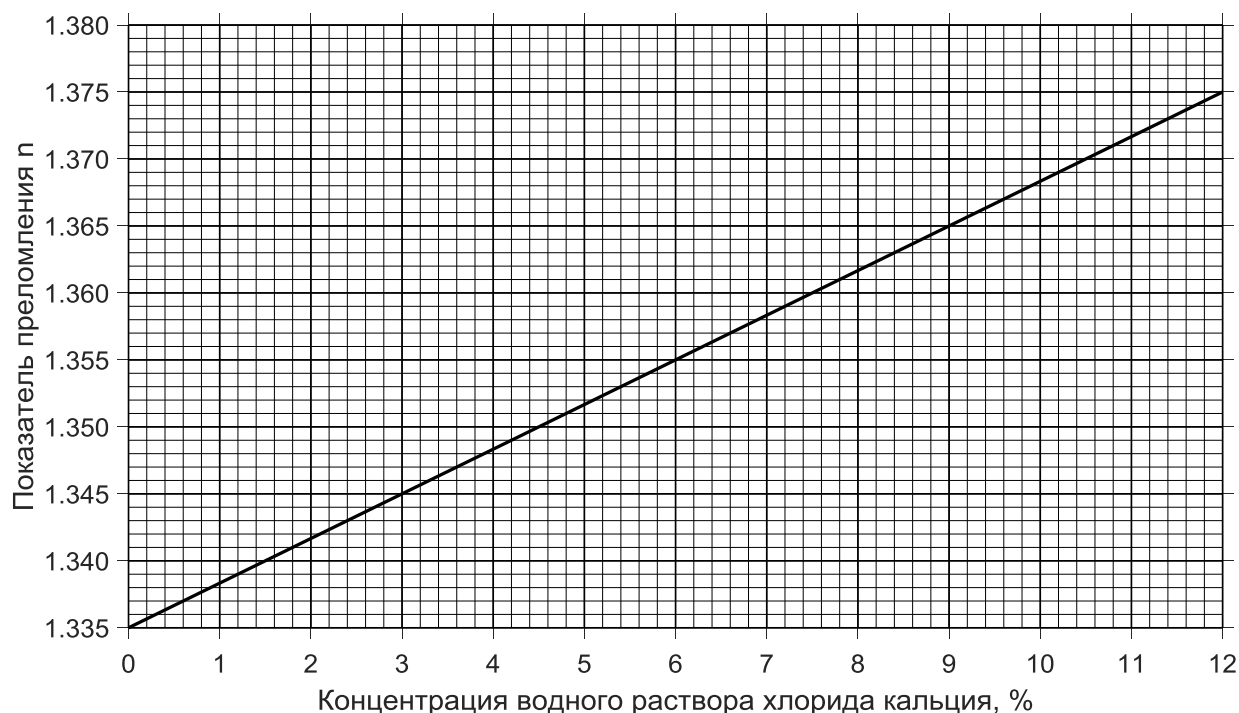


Рисунок 3

Решение:

1. Найдем концентрацию первоначального раствора:

$$\omega \% (\text{CaCl}_2) = \frac{m(\text{CaCl}_2)}{m(\text{CaCl}_2) + m(\text{H}_2\text{O})} \cdot 100\% \approx 20\%$$

Найдем массу добавленного кристаллогидрата:

$$\nu(\text{H}) = \frac{m(\text{H})}{\mu(\text{H})} = \frac{0,53 \text{ г}}{1 \text{ г/моль}} \approx 0,53 \text{ моль}$$

из формулы $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ следует, что $\nu(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}) : \nu(\text{H}) = 1 : 12 \Rightarrow \nu(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}) = \frac{0,53 \text{ моль}}{12} \approx 0,044 \text{ моль}$

$$m(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}) = \nu(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}) \cdot \mu(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}) = 0,044 \text{ моль} \cdot 219 \text{ г/моль} = 9,639 \text{ г}$$

Найдем массу CaCl_2 в кристаллогидрате:

$$\nu(\text{CaCl}_2) : \nu(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}) = 1 : 1 \Rightarrow \nu(\text{CaCl}_2) = 0,044 \text{ моль, тогда } m_{\text{доб}}(\text{CaCl}_2) = \nu(\text{CaCl}_2) \cdot \mu(\text{CaCl}_2) = 0,044 \text{ моль} \cdot 111 \text{ г/моль} = 4,884 \text{ г}$$

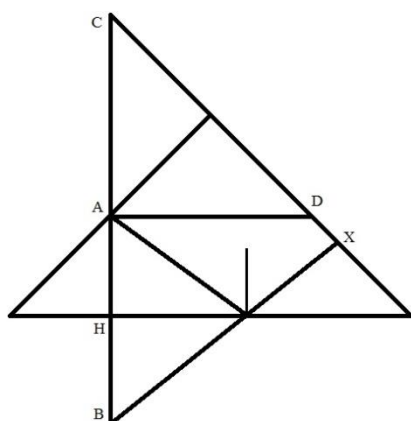
Найдем концентрацию конечного раствора:

$$\omega \% (\text{CaCl}_2) = \frac{m(\text{CaCl}_2) + m_{\text{доб}}(\text{CaCl}_2)}{m(\text{CaCl}_2) + m(\text{H}_2\text{O}) + m(\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O})} \cdot 100\% = \frac{19,084 \text{ г}}{80,639 \text{ г}} \cdot 100\% \approx 23,67 \%$$

2. Теперь найдем начальное и конечное значения показателя преломления. Нетрудно заметить, что зависимость показателя преломления раствора от его концентрации является линейной. Взяв точки (0; 1,335) и (12; 1,375), находим, что $n = \frac{\omega}{300} + 1,335$. Поэтому начальное и конечное значение показателя преломления равны соответственно 1,402 и 1,414.

Далее, пусть источник света находится в точке А, $\text{АН} = a$ и $\text{АD} = b$, а граница света и тени находится в точке Х, зависящей от концентрации раствора (см. рисунок). Вместо рассмотрения отражения от поверхности раствора заменим источник света в точке А на источник света в точке В, симметричной А относительно поверхности раствора. Так как

прямая АВ параллельна нормали к поверхности раствора, величина угла АВХ будет равна величине угла полного отражения. Продлим луч НА до пересечения с прямой DX в точке



С. Пусть $CX = f(n)$, где n – показатель преломления раствора.

$\angle ADC = \alpha$, так как прямая AD параллельна поверхности раствора, поэтому $AC = AD \tan \alpha$.

$$BC = AC + AH + BH = 2a + b \tan \alpha$$

$\angle CBX = \varphi$ – угол полного отражения, для которого

$$\sin \varphi = \frac{n}{n_{\text{ст}}}.$$

$$\angle CXB = 180^\circ - \angle CBX - \angle BCX = 180^\circ - \varphi - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \varphi + \alpha$$

По теореме синусов для треугольника BCX:

$$\frac{BC}{\sin \angle CXB} = \frac{CX}{\sin \angle CBX}, \text{ то есть } \frac{2a + b \tan \alpha}{\cos(\varphi - \alpha)} = \frac{f(n)}{\sin \varphi}.$$

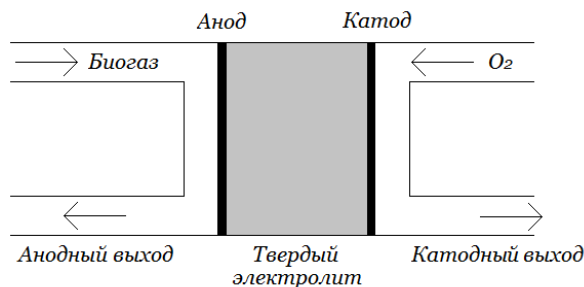
$$\text{Отсюда} \quad f(n) = \frac{(2a + b \tan \alpha) \sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)} = \frac{(2a + b \tan \alpha) \frac{n}{n_{\text{ст}}}}{\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha} =$$

$$\frac{(2a + b \tan \alpha)n}{\sqrt{n_{\text{ст}}^2 - n^2 \cos \alpha + n \sin \alpha}}.$$

Тогда $f(1,414) - f(1,402) \approx 7,071 - 7,011 = 0,06 \text{ см} = 0,6 \text{ мм}.$

Ответ: на 0,6 мм.

Задача 2.1 (25 баллов)

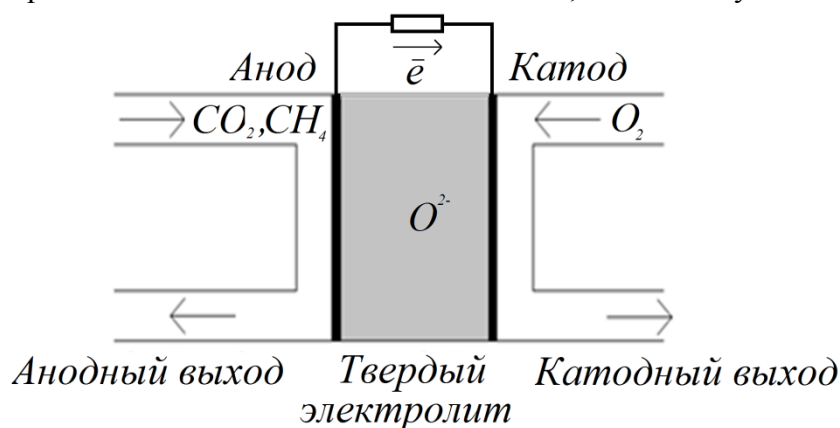


При работе твердооксидного топливного элемента в нем происходит процесс полного окисления биогаза (87% метана и 13% углекислого газа по массе). Средняя рабочая температура топливного элемента составляет 800°C . Реакции в твердооксидном топливном элементе идут на пористых электродах (аноде и катоде), разделенных слоем твердого электролита,

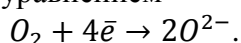
через который могут проходить только двухвалентные ионы кислорода. На анод поступает биогаз, а на катод – кислород. Выход реакции на аноде составляет 85%. Запишите уравнение реакции, которая идет в топливном элементе. Запишите уравнения процессов, протекающих на аноде и катоде. Определите состав газовой смеси на анодном выходе топливного элемента.

Решение:

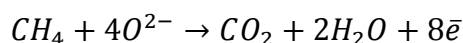
Отобразим на схеме топливного элемента то, что дано в условии задачи:



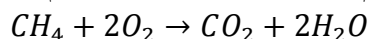
Из приведенной схемы видно, что реакция, происходящая на катоде, описывается уравнением



В условии задачи сказано, что на аноде происходит процесс полного окисления биогаза, т.е. реакция окисления метана идёт до образования CO_2 . Углекислый газ, содержащийся в исходном биогазе, при этом в реакции не участвует. Запишем соответствующее уравнение процесса:



Поэтому уравнение итоговой реакции можно записать следующим образом:



По условию задачи реакция полного окисления идёт с выходом $\eta = 0,85$, т.е. 85% метана превращается в диоксид углерода и воду, которых получается один и два моль соответственно на один моль исходного метана. Пусть x – масса поступившего на анод биогаза, а $\omega(CH_4) = 0,87$ – массовая доля метана в биогазе.

Тогда

$$m_0(CH_4) = M \cdot \omega(CH_4) = 0,87x$$

$$v_0(CH_4) = \frac{m_0(CH_4)}{\mu(CH_4)} = \frac{0,87x \text{ г}}{16 \text{ г/моль}} \approx 0,054x \text{ моль}$$

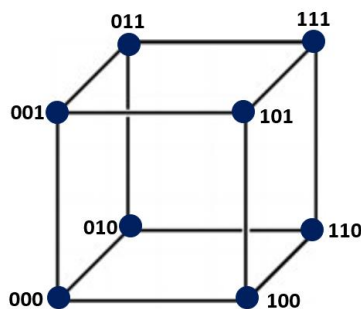
$$m_0(CO_2) = M \cdot \omega(CO_2) = 0,13x$$

	Было			Стало		ω% на выходе
	m	v		m	v	
CH ₄	0,87x	0,054x	Прореагировало v ₀ (CH ₄)·η = 0,046x	0,131x	0,054x-0,046x = 0,008x	$\frac{0,131x}{3,959x} \cdot 100\% \approx 3,3\%$
CO ₂	0,13x	0,003x	Образовалось v ₀ (CO ₂)·η= 0,046x	2,164x	0,003x + 0,046x = 0,049x	$\frac{2,164x}{3,959x} \cdot 100\% \approx 54,7\%$
H ₂ O				1,664x	2v ₀ (CH ₄)·η = 2·0,054x·0,85=0,092x	$\frac{1,664x}{3,959x} \cdot 100\% \approx 42,0\%$
				Всего: 3,959x		

Задача 3.1 (25 баллов)

Кристаллические вещества состоят из правильно уложенных в пространстве одинаковых параллелепипедов, называемых элементарными ячейками. Все элементарные ячейки

устроены абсолютно одинаково: каждая из них содержит одинаковое число одинаково расположенных атомов (ионов) каждого вида и может быть получена из какой-либо одной элементарной ячейки путём некоторого набора параллельных переносов вдоль трёх направлений, задаваемых сторонами параллелепипеда, на расстояния, кратные длинам этих сторон. Совокупность всех точек, в которых находятся атомы кристалла, называется кристаллической решёткой данного вещества. Будем называть кристаллы, у которых элементарная ячейка имеет форму куба, кубическими. Для таких кристаллов удобно выбрать систему прямоугольных координат с началом в вершине одного из кубов, представляющих элементарную ячейку, и взять в качестве единицы длины сторону a куба. Тогда описывать положение того или иного атома кристалла можно с помощью трёх безразмерных координат (x, y, z) атома. Ясно, что получить полное представление об атомной структуре кристалла можно, указав положения всех атомов, входящих в одну из элементарных ячеек, например, всех атомов с координатами, удовлетворяющими условиям $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Элементарная ячейка простейшего кубического кристалла, содержащего один атом на элементарную ячейку, приведена на рисунке: атомы находятся в вершинах куба и для каждой вершины указаны её координаты. В такую структуру кристаллизуется полоний. Если условно представлять себе атомы как шары, то внутри куба лежит одна восьмая часть каждого из шаров, расположенных во всех восьми вершинах куба, как показано на рисунке.

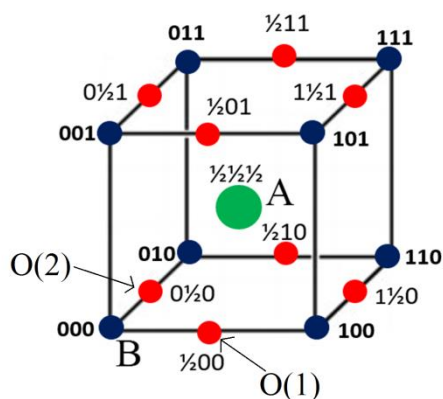


Пусть вещество X является кубическим кристаллом, состав элементарной ячейки которого описывается формулой ABO_2 , где A и B – атомы металлов со степенями окисления $+1$ и $+3$ соответственно, а O – кислород. Допустим, что атомы в кристаллической решётке X имеют следующие координаты: A : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, B : $(0, 0, 0)$; $O(1)$: $(\frac{1}{2}, 0, 0)$; $O(2)$: $(0, \frac{1}{2}, 0)$ (здесь $O(1)$ и $O(2)$ – атомы кислорода, занимающие два различных положения внутри элементарной ячейки).

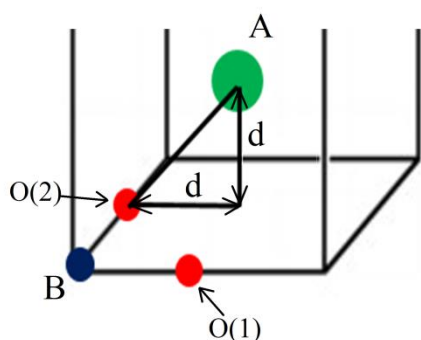
- Изобразите графически элементарную ячейку кристаллической решётки вещества X .
- Определите расстояния $A-O$, $A-B$, если известно, что расстояние $B-O = 2 \cdot 10^{-10}$ м.
- Какое координационное число (количество ближайших атомов кислорода, окружающих атом металла) будет иметь металл B ? Какую геометрию (форму) будет иметь это окружение?
- Какую степень окисления будет иметь металл B , если 5% атомов кислорода в X заменить на фторид-анион F^- (считать, что степень окисления A неизменна).

Решение:

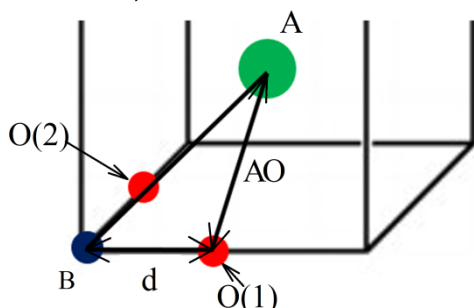
Металл A может иметь только одно положение в элементарной ячейке – в центре куба. Атомы кислорода будут размещаться на серединах его горизонтальных ребер, вдоль которых направлены оси x и y . Атомы металла B будут расположены в вершинах куба, показанного на рисунке в условии задачи (для упрощения на рисунке, расположенном ниже, подписан только атом B , находящийся в начале координат). Поэтому элементарная ячейка может быть изображена следующим образом:



Пусть расстояние $B-O(1)$, совпадающее с $B-O(2)$, равно d ; тогда расстояние $A-O(1)$, совпадающее с расстоянием $A-O(2)$, можно найти по теореме Пифагора (см. рисунок): $AO = \sqrt{2} d \approx 0,282 \text{ нм}$.



Применив теорему Пифагора ещё раз (см. рисунок), можно найти расстояние $AB = \sqrt{3} d = 0,346 \text{ нм}$.

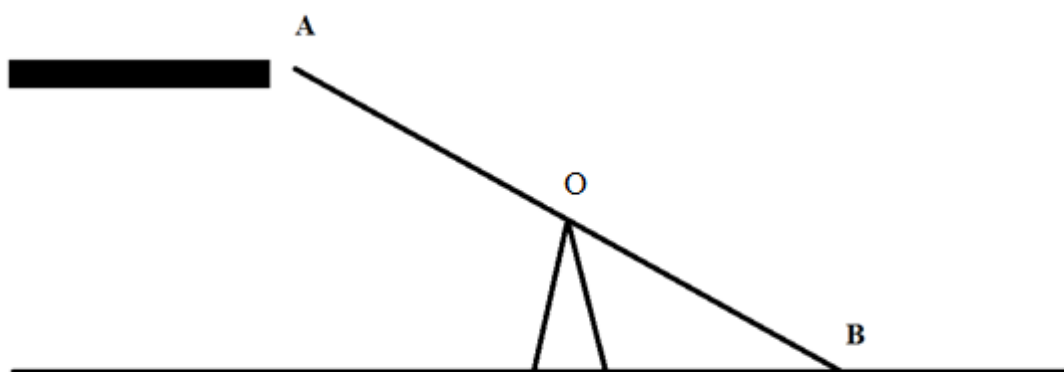


Из рисунка видно, что ближайшими соседями атомов В будут 4 атома кислорода. Например, атом В с координатами $(0,0,0)$ будет находиться в окружении атомов кислорода с координатами $(0, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, -\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ и $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$. Нетрудно заметить, что они образуют квадрат.

Степень окисления q металла В после замены части кислорода на фтор может быть найдена из условия электронейтральности кристалла в целом. Если атомами фтора (которые в соединении приобретут степень окисления -1 и превратятся во фторид-анионы) заместить 5% атомов кислорода, то новая формула вещества будет $ABO_{1,9}F_{0,1}$; поэтому должно выполняться соотношение $1 + q + 1,9 \cdot (-2) + 0,1 \cdot (-1) = 0$ (степени окисления металла А, кислорода и фтора равны $+1$, -2 и -1 соответственно). Отсюда $q = +2,9$.

Задача 4.2 (25 баллов)

Акробаты Роман и Элина показывают трюк на качелях. В начальный момент времени Элина стоит правом конце качелей, касающемся земли в точке В, а Роман заходит на качели в точке А с длинного помоста, расположенного на той же высоте, что и левый конец качелей (см. рисунок). После этого конец А качелей опускается и ударяется о землю, Элину при этом подбрасывает в воздух, после чего она приземляется на помосте, с которого сошел Роман. При каком начальном значении угла наклона качелей Элина приземлится на наибольшем расстоянии от точки отрыва от качелей? Длину качелей считайте фиксированной, массой качелей пренебрегите, $|AO| = |OB|$.



Решение:

Пусть масса Романа M , а масса Элины m . В начальный момент энергия системы «Роман + Элина» составляла $M \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha$, где α – угол наклона качелей, а L – длина качелей. В момент времени непосредственно перед ударом левого конца качелей о землю энергия системы равна $m \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha + \frac{(M+m)v^2}{2}$, где v – скорость Элины перед прыжком. Эти две энергии равны, то есть:

$$\frac{(M+m)v^2}{2} = (M - m) \cdot g \cdot L \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

Скорость Элины в начале прыжка направлена по нормали к качелям, поэтому ее горизонтальная составляющая равна $v \cdot \sin \alpha$, а вертикальная – $v \cdot \cos \alpha$. Пусть время полета Элины составляло t , а по горизонтали она пролетела расстояние d , тогда:

$$v \cdot t \cdot \sin \alpha = d,$$

$$v \cdot t \cdot \cos \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Тогда $t = \frac{2v \cos \alpha}{g}$,

$$d = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Подставляя значение v^2 из (1), получаем:

$$d = \frac{4(M-m)L \sin^2 \alpha \cos \alpha}{M+m}.$$

Таким образом, нужно найти, при каком значении α достигается максимум выражения $\sin^2 \alpha \cos \alpha = \cos \alpha - \cos^3 \alpha$. Нетрудно понять (например, вычислив производную этого выражения), что максимум достигается при $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, при этом $\alpha \approx 55^\circ$.

Ответ: 55° .