

Задание : Предприниматель может инвестировать в периоде $t = 1, 2, \dots, T$, $T > 1$ имеющиеся у него средства $a_t \geq 0$ в проект с постоянной доходностью $R > 0$ или потратить часть на потребление $c_t \geq 0$, так что $a_{t+1} = R(a_t - c_t)$, чтобы максимизировать свою суммарную полезность от потребления за T периодов:

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \dots + \sqrt{c_T} \rightarrow \max .$$

Начальные активы предпринимателя $a_1 = A > 0$.

(а) Найдите выражение оптимального распределения потребления по периодам через начальные активы A и доходность R при $T = 2, T = 3$.

(б) Докажите, что при произвольном T на оптимальной траектории

$$c_t = R^2 c_{t-1}, \quad t > 1.$$

(в) Найдите решение для произвольного T (используйте тот факт, что в последнем периоде потребляются все накопленные средства).

(г) Приведите решение для линейной функции полезности предпринимателя

$$c_1 + c_2 + \dots + c_T \rightarrow \max .$$

А каков будет ответ при $R = 1$?

(д) Как изменится решение в случае

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \dots + \sqrt{c_{T-1}} + \sqrt{a_T} \rightarrow \max$$

для произвольного T ?