Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

О распределении точки первого входа для случайных блужданий в области с границами

Научный руководитель – Замятин Андрей Андреевич

Кузин Иван Максимович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: ivan.kuzin@math.msu.ru

В работе исследуется однородная по времени марковская цепь $\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2)$ на пространстве состояний $\Pi = Z \times \{0, 1, \ldots, N\}$. Цепь является пространственно однородной по первой координате и имеет ограниченные скачки по первой координате. Рассматривается классификация состояний цепи, асимптотическое поведение вероятностей достижения границы $A = \{0\} \times \{0, \ldots, N\}$ и эмпирические характеристики накопления частиц на этой границе.

1. Постановка задачи и основные определения

Рассматривается однородная по времени марковская цепь $\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2)$ на пространстве состояний

$$\Pi = Z \times \{0, 1, \ldots, N\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Переходные вероятности обозначим

$$p^{lj}_{l'j'} = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = (l', j') \mid \xi_n = (l, j)), \quad (l, j), (l', j') \in \Pi.$$

Предполагается, что цепь ξ_n удовлетворяет следующим условиям:

- Цепь ξ_n неприводима и непериодична.
- Скачки по первой координате ограничены: если $|l - l'| > 1$, то $p^{lj}_{l'j'} = 0$.
- Пространственная однородность по первой координате: $p^{lj}_{l'j'} = p^{j}_{l'-l,\,j'}$.

Индуцированная цепь. Определим цепь с конечным пространством состояний $\{0, 1, \ldots, N\}$ и переходными вероятностями

$$_0p^j_{j'} = p^j_{1,j'} + p^j_{0,j'} + p^j_{-1,j'}.$$

Её матрицу переходных вероятностей обозначим $P = P_1 + P_0 + P_{-1}$, где $(P_s)^l_j = p^{i+s,j}_{i,l}$. Из условий на исходную цепь следует, что индуцированная цепь также неприводима и апериодична; её стационарное распределение обозначим $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_N)$.

Средний скачок. Для каждого $j \in \{0, \ldots, N\}$ определим

$$m_j = \mathbb{E}(\xi^1_{n+1} - \xi^1_n \mid \xi^2_n = j).$$

скорость сноса:

$$v = \sum_{j=0}^{N} \pi_j m_j.$$

Моменты достижения границы. Рассмотрим множество $A = \{(0, j) : j = 0, \dots, N\} \subset$ П. Для начального состояния (i, j_0) с $i > 0$ определим последовательность моментов

$$\tau_1 = \min\{n : \xi_n^1 = i - 1\},\ \tau_2 = \min\{n > \tau_1 : \xi_n^1 = i - 2\},\ \dots,\ \tau_i = \min\{n : \xi_n^1 = 0\}.$$

Вероятность достижения границы в конкретной точке $(0, j)$:

$$h_{0,j}^{i,j_0} = \mathbb{P}\big(\xi_{\tau_i}^2 = j,\ \tau_i < \infty \mid \xi_0 = (i, j_0)\big).$$

Для удобства введем вектор $h_{0,j}^i = (h_{0,j}^{i,j_0}, j \in \{0, \dots, N\})$.

Вложенная марковская цепь. Определим процесс $\eta_k = \xi_{\tau_k}^2$ со значениями в $\{0, \dots, N\}$. Его переходные вероятности обозначим

$$q_j^i = \mathbb{P}(\eta_{k+1} = j \mid \eta_k = i).$$

Стационарное распределение цепи η_k обозначим $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_N)$, вектор из единиц обозначим $\mathbf{1}$, e_l– вектор, у которого l–ая компонента равна 1, а остальные нулю.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $v < 0$. Тогда для любых $j, j_0 \in \{0, \dots, N\}$ при $i \to \infty$*

$$h_{0,l}^i \to \frac{\mathbf{1} \cdot \pi(P_1 e_l - P_{-1} h_{0,l}^1)}{v}.$$

Для доказательства теоремы 1 используется метод производящих функций. Вводится матричнозначная функция

$$P(x) = xP_1 + P_0 + x^{-1}P_{-1}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

затем рассматривается уравнение на производящую функцию последовательности векторов $\{h_a^i(z)|_{z=1}\}_{i=1}^{\infty}$ (последовательности производящих функций вероятностей достижения в точке $z = 1$). Анализ аналитичности производящей функции позволяет выразить ν через параметры задачи. Также, с помощью [1], был получен алгоритм поиска векторов $h_{0,l}^1$ для всех $l \in 0, 1, ..., N$,

Теорема 2. *Для каждого $j \in \{0, \dots, N\}$ определим*

$$N_n(j) = \sum_{j_0=0}^{N} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{\xi_{\tau_i}^2 = j \mid \xi_0 = (i, j_0)\},$$

т.е. число частиц, стартовавших с первой координатой не больше n и поглотившихся в точке $(0, j)$. Тогда при $v < 0$

$$\frac{N_n(j)}{\sum_{k=0}^{N} N_n(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \frac{\mathbf{1} \cdot \pi(P_1 e_l - P_{-1} h_{0,l}^1)}{v}.$$

Доказательство теоремы 3 опирается на усиленный закон больших чисел Колмогорова, на теорему 2, и на тот факт, что $h_{0,j}^{i,j_0}$ сходится к ν_j при $i \to \infty$.

Список литературы

[1] Murthy G.R., Kim M., Coyle E.J. (1991). *Equilibrium analysis of skip free Markov chains: nonlinear matrix equations*. Communications in Statistics. Stochastic Models, 547–571.