

Принцип больших уклонений для функционалов фрактального гауссовского шума

Научный руководитель – Прохоров Александр Владимирович

Савицкий Александр Вадимович

Выпускник (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и
случайных процессов, Москва, Россия

E-mail: savid2000@mail.ru

Пусть $X = \{X_k\}$ — фрактальный гауссовский шум с параметром Херста $H \in (0, 1)$. В работе исследуется принцип больших уклонений (ПБУ) для эмпирических средних вида $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$. Поведение этой суммы принципиально зависит от соотношения параметра Херста H и ранга Эрмита m функции $f(x)$ (в работе рассматриваются случаи $m \geq 3$ как наиболее нетривиальные). Выделяются два основных асимптотических режима: короткой (SRD) и длинной (LRD) памяти. Для полинома Эрмита $f(x) = H_m(x)$ при условии $H \leq 1 - 1/m$ реализуется режим SRD. В этом случае корреляции убывают достаточно быстро, чтобы ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |r(k)|^m$ сходилась, а сама последовательность удовлетворяет ПБУ со скоростью $a_n = n^{\frac{2}{m}}$. Функция уклонений (rate function) строится на основе методов сдвига гауссовских мер, неравенств гиперконтрактивности и других, обобщающих теорему Гартнера-Эллиса [1]. С помощью рассмотрения интегрального представления исходного процесса получена точная константа в выражении функции уклонений, выраженная через норму некоторого линейного оператора.

В режиме LRD, когда $H > 1 - 1/m$, длинная память кардинально меняет структуру больших уклонений. Скорость экспоненциального убывания вероятностей уменьшается и составляет $a_n = n^{2-2H}$. Для полинома Эрмита ПБУ выполняется с функцией уклонений $J(y) = y^{2/m} / (2H(2H-1))$. Оценка снизу опирается на теорему Камерона-Мартина и сдвиг базового гауссовского процесса в гильбертовом пространстве [2]. Оценка сверху требует анализа ортогональных проекций на наилучшую линейную несмещенную оценку среднего (BLUE), где винеровские хаосы малого порядка оказываются экспоненциально незначимыми на целевой шкале скорости [4]. Полученные результаты обобщаются на произвольные полиномы вида $f(x) = \sum_{j=0}^m c_j H_j(x)$. В режиме SRD асимптотика больших уклонений полностью детерминирована старшим членом полинома $c_m H_m(x)$, в то время как в режиме LRD возможны разные случаи: если наибольшая степень удовлетворяет условию LRD, то все полиномы Эрмита вносят свой вклад в определение функции уклонений. Если же наибольшая степень выходит за пределы условия LRD, то поведение аналогично режиму SRD.

Для класса произвольных непрерывных функций $f(x)$, мажорируемых полиномом степени m , то есть удовлетворяющих условию $|f(x)| \leq C(1 + |x|^m)$, ПБУ доказывается с использованием методов аппроксимации. Установление экспоненциальной плотности (exponential tightness) последовательности позволяет свести анализ к исследованию полиномиальных мажорант на компактных множествах. Данный подход позволяет перенести оценки скоростей и структуру функции уклонений с полиномиального случая на более широкий класс функций, сохраняя точную границу перехода между SRD и LRD режимами [3].

Источники и литература

- 1) Dembo A., Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. New York: Springer, 1998.
- 2) Janson S. The Cameron—Martin shift. In: Gaussian Hilbert Spaces. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press; 1997:216-227.
- 3) Nourdin I., Peccati G. Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Wiener Chaos to the Fourth Moment Theorem. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- 4) Peccati, Giovanni and Taqqu, Murad. (2011). Wiener chaos: Moments, Cumulants and diagrams: A survey with computer implementation. 10.1007/978-88-470-1679-8.