

Распределение нулей решений уравнения Якоби со случайной кривизной

Научный руководитель – Соколов Дмитрий Дмитриевич

Долгих Александр Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: alexander.dolgikh@math.msu.ru

Рассмотрим две геодезические, выходящие из одной точки под малым углом θ . Отложим на обеих геодезических от точки пересечения расстояние x , расстояние между получившимися точками будет равно $y(x)\theta$. Величина $y(x)$ называется полем Якоби, а её поведение описывается уравнением $y''(x) + K(x)y(x) = 0$, где K - кривизна пространства.

Если кривизна положительна, то поле Якоби осциллирует; если отрицательна, то экспоненциально растёт. В этой работе мы рассматриваем $K(x)$ как кусочно-постоянный случайный процесс, значения которого на интервалах постоянства являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами. При случайной в среднем равной нулю кривизне картина более сложная и интересная: в целом наблюдается экспоненциальный рост, но на участках с положительной кривизной появляются нули. Интересно изучить зависимость распределения расстояния между нулями от распределения кривизны. Этот вопрос на данный момент хуже изучен в литературе, чем эффект роста решений. Изучение этой темы может быть интересно с точки зрения космологических приложений, так как нули поля Якоби отвечают гравитационным линзам.

В данной работе распределений нулей поля Якоби исследуется с помощью численных экспериментов, в которых моделируются решения уравнения Якоби, и по ним получаются эмпирические функции распределения расстояния между нулями. Изучаются и сравниваются результаты для случаев, когда кривизна распределена равномерно на отрезке или нормально, а также для случаев, когда точки обновления кривизны образуют равномерный или пуассоновский поток. Также выводится теоретический результат о существовании нижней границы для расстояния между нулями в случае ограниченной сверху кривизны, а именно: если кривизна не превосходит K_M , то расстояние между нулями соответствующего поля Якоби больше или равно $\frac{\pi}{K_M}$.