Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

О свойствах нетранзитивных триплетов относительно некоторых преобразований функций распределений

Научный руководитель – Лебедев Алексей Викторович

Якушева Александра Николаевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: alexandra.yakusheva.msu@gmail.com

В работе рассматриваются нетранзитивные триплеты случайных величин. Для пары независимых случайных величин X, Y задаётся величина $p_{XY} := P(X < Y)$. Величина X называется стохастически предшествующей [2] величине Y ($X \prec Y$), если выполняется $p_{XY} > p_{YX}$. Нетранзитивным триплетом называется тройка независимых случайных величин X, Y, Z, для которой выполняется циклическое отношение $X \prec Y \prec Z \prec X$.

Для количественной оценки эффекта нетранзитивности в триплете X, Y, Z вводится величина $p_{XYZ} = \min\{p_{XY}, p_{YZ}, p_{ZX}\}$, называемая силой нетранзитивности [3]. Её максимальное достижимое значение, равное $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}618$, было впервые определено С. Трыбулой, им же построен пример триплета, на котором оно достигается [3]. Взяв за основу один из триплетов Трыбулы и модифицировав его, зададим семейство триплетов случайных величин с нулевыми средними:

$$X = \begin{cases} -a_1, & \text{с вероятностью } \ 1 - t_1, \\ 1, & \text{с вероятностью } \ t_1, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{с вероятностью } \ t_2, \\ a_2, & \text{с вероятностью } \ 1 - t_2, \end{cases} \quad Z = 0,$$

где $a_i = \dfrac{t_i}{1-t_i}$, $i = 1; 2$. Триплеты этого семейства нетранзитивны в области значений параметров $D = \left\{ t_1, t_2 : t_1 > \dfrac{1}{2},\ t_2 > \dfrac{1}{2},\ t_1 t_2 < \dfrac{1}{2} \right\}$.

В работе [1] было обнаружено, что нетранзитивность параметрического триплета Трыбулы может сохраняться при взятии максимума из двух независимых копий исходных величин. Этот результат обобщается для всех нетранзитивных триплетов при следующих преобразованиях: взятии «n-кратного максимума» из $n \in \mathbb{N}$ независимых копий исходных случайных величин и взятии «геометрического максимума» из ν независимых копий исходных случайных величин, где ν является геометрически распределённой случайной величиной с некоторым параметром p. С помощью определённого выше семейства триплетов доказаны следующие теоремы для этих преобразований.

Теорема 1. Для любого натурального $n \geq 2$ существуют нетранзитивные триплеты, преобразование n-кратного максимума которых сохраняет нетранзитивность, причём верхняя грань силы нетранзитивности по всем триплетам после данного преобразования не меньше $(2 - 2^{-n})^{-1}$.

Теорема 2. Для любого $\mu > 1$ существуют нетранзитивные триплеты, для которых преобразование геометрического максимума со средним μ сохраняет нетранзитивность, причём верхняя грань силы нетранзитивности по всем триплетам после данного преобразования не меньше

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, & \text{при } \ 1 < \mu \leq \mu_{\text{crit}}, \\ \dfrac{\mu+1}{2\mu+1}, & \text{при } \ \mu > \mu_{\text{crit}}, \end{cases} \qquad \text{где } \mu_{\text{crit}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Источники и литература

1) Якушева А.Н. Об устойчивости нетранзитивных триплетов Трыбулы к преобразованиям суммы и максимума // Теория вероятн. и ее примен. 2026. Т. 71. В. 1. С. 174-185.
2) Boland P.J., Singh H., Cukic B. The stochastic precedence ordering with applications in sampling and testing // J. Appl. Probab. 2004. Vol. 41. N 1. P. 73-82.
3) Trybula S. On the paradox of three random variables // Zastos. Matem. 1961. V. 5. N 4. P. 321-332.