Секция «19.14 Теория вероятностей и математическая статистика»

Стохастическая модель голосования с упрямыми участниками

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Прошляков Олег Сергеевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: prosholeg@inbox.ru

Под моделями голосования понимают класс многомерных или бесконечномерных марковских процессов специального вида. Они известны достаточно давно, (см. [1]), основные результаты ранних периодов изучения моделей голосования связаны с системами с однотипными участниками. В настоящий момент предлагаются и изучаются их новые модификации (например, см. [4]). Та конкретная стохастическая модель, которой мы коснемся в настоящем докладе, эволюционирует в дискретном времени $t \in \mathbb{Z}_+$ имеет бесконечное число участников $x \in \mathbb{Z}$ и близка к базовой (линейной) модели из работы [3]. Соответствующий случайный процесс имеет вид $\vec{\xi_t} = (\xi_t(x),\, x \in \mathbb{Z}) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Значения 0 или 1, принимаемые процессом, мы можем интерпретировать как голос, отданный за кандидата под номером 0 или 1 соответственно.

Процесс $\vec{\xi_t}$ удовлетворяют следующим свойствам:
1) процесс является марковским (см. [1, 2]): конфигурация системы в момент времени $t+1$ зависит только от конфигурации в момент времени t и не зависит от предыдущих
2) участники голосуют условно независимо:

$$\mathbb{P}\left(\xi_t(x_1) = 1, \ldots, \xi_t(x_n) = 1 \mid \xi_{t-1}(z), z \in \mathbb{Z}^d\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\xi_t(x_1) = 1 \mid \xi_{t-1}(z), z \in \mathbb{Z}^d\right) \ldots \mathbb{P}\left(\xi_t(x_n) = 1 \mid \xi_{t-1}(z), z \in \mathbb{Z}^d\right)$$

3) линейность модели:

$$\mathbb{P}\left(\xi_t(x) = 1 \mid \xi_{t-1}(z), z \in \mathbb{Z}^d\right) = \sum_{y \in Q} a_y \xi_{t-1}(x+y)$$

(Множество Q показывает, какие точки мы называем соседними, а числа a_y неотрицательны и имеют сумму равную 1.)

Особенностью модели, которую мы обсудим в настоящем докладе является наличие некоторого числа упрямых участников. То есть, имеются некоторые точки x, такие, что случайная величина $\xi_t(x)$ является п.н. постоянной и не меняется с течением времени, не зависит эволюции соседних точек. Иначе говоря, есть точки такие, что $\mathbb{P}(\xi_t(x) = 1) = 1$ или $\mathbb{P}(\xi_t(x) = 0) = 1$.

Сначала разбирается случай одного упрямого участника. Например, получен результат: если $Q = \{-1, 1\}$, $a_1 > a_{-1}$ и в точке 0 упрямый избиратель, голосующий за единицу ($\mathbb{P}\left(\xi_t(0) = 1\right) = 1$), то верно следующее равенство:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\xi_t(k) = 1) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\left(\frac{a_{-1}}{a_1}\right)^k & , \quad k > 0 \\ 1 & , \quad k \le 0 \end{cases}$$

где α - вероятность голоса каждого участника, равного 1 в нулевой момент времени при условии независимости распределений величин $\xi_0(x)$.

Далее идет обобщение результата на произвольное количество упрямых участников.

Источники и литература

1) Лиггетт Т.М., *Марковские процессы с локальным взаимодействием*, М.:Мир 1989
2) G. Fayolle, V.A. Malyshev, M. V. Menshikov, *Constructive theory of countable Markov chains*, Cambridge University Press, 1995
3) V.A. Malyshev, A.D. Manita, E.N. Petrova, E. Scacciatelli, *Hydrodynamics of the Weakly Perturbed Voter Model*, Markov Processes And Related Fields Journal 1995, v.1, Issue 1, 3-56
4) Тумояков Д. П., Конечная модель голосования со случайными возмущениями, https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22109/129502_uid567591_report.pdf