

**Стратегии оптимального роста в стохастической модели рынка с
эндогенными ценами**

Научный руководитель – Житлухин Михаил Валентинович

Токаева Александра Александровна

Аспирант

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

E-mail: galynka@yandex.com

Рассматривается модель рынка с непрерывным временем, состоящая из N агентов и K активов, которые выплачивают (определяемые экзогенно) дивиденды с интенсивностями $D_t^k, k = 1, \dots, K$ на один актив за единицу времени. Цены активов в модели задаются строго положительными непрерывными семимартингалами S_t^k , которые определяются эндогенным образом в зависимости от стратегий агентов из условия равенства спроса и предложения на каждый из активов в каждый момент времени.

Каждый агент отождествляется с его процессом капитала W_t и торговой стратегией (λ_t, c) , которая состоит из процесса инвестиционных пропорций $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^K)$ и интенсивности потребления $c > 0$. Компоненты λ_t задают пропорции, в которых этот агент распределяет свой капитал между активами. Процесс λ_t является предсказуемым с условием $\sum_{k=1}^K \lambda_t^k = 1$ для всех $t \geq 0$. Компоненты λ_t^n могут быть отрицательными, что соответствует коротким продажам.

Динамика капитала агента задается уравнением

$$dW_t = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^k W_t}{S_t^k} (dS_t^k + D_t^k dt) - c W_t dt, W_0 > 0$$

Основное предположение модели состоит в том, что каждый агент является достаточно малым по сравнению со всем рынком, и его стратегия не оказывает влияния на цены активов, но при этом цены определяются совокупной стратегией всех агентов, которую мы будем называть *рыночной стратегией*, или "большим" агентом. Обозначим за $(\hat{\lambda}_t, \bar{c})$ и \hat{W}_t стратегию и процесс капитала большого агента, за (λ_t, c) и W_t стратегию и процесс капитала малого агента.

Определение 1. Будем говорить, что стратегия $(\hat{\lambda}_t, \bar{c})$ является *рыночной стратегией оптимального роста*, если для любой стратегии малого агента (λ_t, c) с $c \geq \bar{c}$ процесс W_t/\hat{W}_t является супермартингалом.

Обозначим $R_t^k := \frac{R_t^k}{\sum_{k=1}^K R_t^k}$ процессы относительных интенсивностей выплаты дивидендов. Для произвольной интенсивности потребления $\bar{c} > 0$, определим процесс инвестиционных пропорций $\hat{\lambda}_t = (\hat{\lambda}_t^1, \dots, \hat{\lambda}_t^K)$ с компонентами

$$\hat{\lambda}_t^k = \bar{c} \mathbb{E} \left(\int_t^{+\infty} e^{-\bar{c}(s-t)} R_s^k ds \mid \mathcal{F}_t \right) \quad (1)$$

Теорема 1. Стратегия $(\hat{\lambda}_t, \bar{c})$, определенная соотношением (1), является рыночной стратегией оптимального роста. Как следствие, для любой стратегии малого агента с интенсивностью потребления $c \geq \bar{c}$ существует случайная величина $K < \infty$ такая, что $W_t/\hat{W}_t \leq K$.

Последнее соотношение можно рассматривать как *локальную эволюционную устойчивость* рыночной стратегии. В работе [2] доказываем единственность этой стратегии. Для дискретного времени справедливы более сильные результаты о существовании *глобально эволюционно устойчивых, или выживающих, стратегий* (см. [4] для долгоживущих активов, [6] для короткоживущих активов) - без условия на то, что начальная доля агентов, использующих другие стратегии, достаточно мала.

Источники и литература

- 1)
- 2) M. Zhitlukhin. (2024). Optimal growth strategies in a stochastic market model with endogenous prices. *Probability Theory and Applications*, 69:2 (2024), 205–216.
- 3)
- 4) R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, Le Xu. (2011). Evolutionary finance and dynamic games. *Mathematics and Financial Economics*, 5:3 (2011): 161-184.
- 5)
- 6) Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013). Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144.