Секция «19.12 Прикладная механика и управление»

Оптимизация траекторий летательного аппарата с управляемым вектором тяги в горизонтальной плоскости

Научный руководитель – Черкасов Олег Юрьевич

Орёл Никита Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра прикладной механики и управления,
Москва, Россия

E-mail: nikita.orel@math.msu.ru

В докладе будет рассмотрена задача максимизации горизонтальной дальности с ограничением на расход топлива. Движение центра масс аппарата происходит в горизонтальной плоскости. Считаем, что сопротивление среды отсутствует, а скорость аппарата постоянная. В качестве модели движения возьмем систему уравнений Маркова-Дубинса [1],[2], в которой движение в плоскости реализуется за счет реактивной силы, компенсирующей силу тяжести, и силы, ортогональной траектории. Уравнения движения в безразмерном виде:

$$\dot{x} = \cos\theta, \quad \dot{y} = \sin\theta, \quad \dot{\theta} = u, \tag{1}$$

где x, y – горизонтальная и вертикальная координаты центра масс аппарата, θ – угол между вектором скорости и направлением оси абсцисс, u – сила тяги. Начальные и краевые условия:

$$x\left(0\right) = x_0, \quad y\left(0\right) = y_0, \quad \theta\left(0\right) = \theta_0, \quad y(T) = y_1, \quad \theta\left(T\right) = \theta_1. \tag{2}$$

Ограничения на управление u имеют вид $-\bar{u} \leqslant u(t) \leqslant \bar{u}$. Целью управления является минимизация функционала вида

$$J = -x\left(T\right) + k\int\limits_0^T \sqrt{1+u^2}\,dt \to \min_{|u|\leqslant\bar{u}}, \tag{3}$$

Здесь $k > 0$ – заданная константа. Время процесса T считаем фиксированным.

С использованием принципа максимума Понтрягина [3], исходная задача оптимального управления (1)-(3) была сведена к краевой для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\theta, \quad x\left(0\right) = x_0, \\ \dot{y} = \sin\theta, \quad y\left(0\right) = y_0,\, y\left(T\right) = y_1, \\ \dot{\theta} = u, \quad \left(0\right) = \theta_0, \quad \theta\left(T\right) = \theta_1, \\ \dot{\psi}_\theta = \sin\theta - a\cos\theta, \quad \psi_\theta\left(T\right) = b. \end{cases} \tag{4}$$

Задача состоит в нахождении такого $\psi_\theta(0)$, при котором $\psi_\theta(T) = b$. Управление $u(t)$ определяется по следующему правилу:

$$u\left(t\right) = \begin{cases} \bar{u}, \quad u_{\text{extr}} \geqslant \bar{u}, \\ u_{\text{extr}}, -\bar{u} < u_{\text{extr}} < \bar{u}, \\ -\bar{u}, \quad u_{\text{extr}} \leqslant -\bar{u}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь u_{extr} определяется из соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Longleftrightarrow u_{\text{extr}} = \frac{\psi_\theta}{\sqrt{k^2 - \psi_\theta^2}},$$

где выражение для гамильтониана задачи (1)-(3) имеет вид

$$H = a\cos\theta + b\sin\theta + \psi_\theta u - k\sqrt{1+u^2}. \tag{6}$$

С использованием первого интеграла (6) было установлено число переключений управления u вдоль оптимальной траектории (не более двух). Качественное исследование динамической системы

$$\begin{cases} \dot{\theta} = u, \\ \dot{u} = \dfrac{(\sin\theta - a\cos\theta)\left(1+u^2\right)^{3/2}}{k}. \end{cases} \tag{7}$$

с помощью метода фазовой плоскости позволяет установить следующее: при достаточно больших временах процесса T движение происходит в окрестности седловой точки в плоскости (θ, u), что соответствует магистральному движению (квазипрямолинейный участок оптимальной траектории). Установлена структура оптимального управления. Аналитически построен синтез оптимального управления. Численное моделирование иллюстрирует результаты, полученные аналитически.

Список литературы

[1] *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American. Mathematics. 1957. V. 79. № 3. P. 497–516.

[2] *Sussmann H.J.* The Markov-Dubins Problem with Angular Acceleration Control // Proc. 36th IEEE Conf. on Decision and Control. San Diego, 1997. P. 2639–2643.

[3] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.