Секция «19.10 Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры индекса $n-1$ в алгебре матриц порядка n

Научный руководитель – Маркова Ольга Викторовна

Щастный Виктор Алексеевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: shchastnyiva@my.msu.ru

Пусть $M_n(\mathbb{F})$ — полная алгебра матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $N_n(\mathbb{F})$ — подалгебра верхних нильтреугольных матриц. Коммутативная нильпотентная подалгебра $S \subset M_n(\mathbb{F})$ называется максимальной, если она не содержится ни в какой большей коммутативной нильпотентной подалгебре.

Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в $M_n(\mathbb{F})$ были классифицированы в [1, 2] при условии существования элемента индекса $n-1$, а в [3] – при ограничении $|\mathbb{F}| \geqslant n$.

Определим отображение $\varphi\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ по правилу $\varphi(X) = JX^TJ$, где $J = \sum_{i=1}^{n} E_{i,n+1-i}$. Известно, что φ является антиавтоморфизмом, сохраняющим $N_n(\mathbb{F})$. Для подалгебры $S \subset N_n(\mathbb{F})$ индекса $n-1$ определим множество

$$I(S) = \big\{ j \in \{1,\dots,n-1\} \mid x_{j,j+1} = 0 \ \forall X = (x_{i,k}) \in S \big\},$$

обобщающее индекс $r(\mathcal{A})$ из [3].

Предложение 1. *Пусть S – коммутативная нильпотентная подалгебра индекса $n-1$ в $N_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда $I(S) = \{i\}$ или $I(S) = \{i, i+1\}$ для некоторого i.*

На основании предложения, с учётом редукции числа случаев при помощи антиавтоморфизма φ, над произвольным полем $\mathbb{F}$ без каких-либо ограничений построены три канонические подалгебры:

$$\begin{aligned}
&N_1 = \langle A_0, A_0^2, \dots, A_0^{n-2}, E_{1,n} \rangle, \quad A_0 = \textstyle\sum_{j=2}^{n-1} E_{j,j+1};\\
&N_2 = \varphi(N_1);\\
&N_3 = \langle A, A^2, \dots, A^{n-2}, B \rangle, \quad n \geqslant 5,
\end{aligned}$$

где A имеет ненулевые элементы в позициях $(j, j+1)$ при $j \neq i, i+1$ и $(i, i+2)$, $B = E_{1,i+1} + E_{i+1,n}$, причём $AB = BA = 0$, $B^2 = A^{n-2} = E_{1,n}$.

Элементарными методами, без использования жордановой нормальной формы, доказана максимальность N_1, N_2, N_3 и их попарная несопряжённость (через размерность аннулятора: $\dim \operatorname{Ann}(N_1) = \dim \operatorname{Ann}(N_2) = 2$, $\dim \operatorname{Ann}(N_3) = 1$).

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле, $n > 3$. Тогда всякая максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра индекса $n-1$ в $M_n(\mathbb{F})$ сопряжена с N_1, N_2 (при $n = 4$) или с одной из N_1, N_2, N_3 (при $n \geqslant 5$).*

В случае $I(S) = \{i\}$ классификация проходит над произвольным полем без ограничений, а подалгебра N_3 расщепляется на классы сопряжённости по группе квадратов $(\mathbb{F}^*)^2$. Случай $I(S) = \{i, i+1\}$ над произвольным полем является предметом дальнейшего исследования.

Список литературы

[1] Супруненко Д. Ф., Тышкевич Р. И., *Перестановочные матрицы*, 2-е изд. М., УРСС, (2003).

[2] Павлов И. А., *О коммутативных нильпотентных алгебрах матриц*, Докл. Акад. наук БССР **11**, No. 10 (1967), 870–872.

[3] Маркова О. В., *Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре матриц порядка n*, Зап. научн. сем. ПОМИ **453** (2016), 219–242.