Секция «19.10 Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Выделяемость некоторых классов групп уравнениями

Научный руководитель – Клячко Антон Александрович

Королева Дарья Максимовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

E-mail: korolek_08_04@mail.ru

Система уравнений $\{w_i = 1 \mid i \in I\}$, где $w_i \in (G \sqcup X^{\pm 1})^*$, X - множество неизвестных, *разрешима над* G, если существует группа $\widetilde{G} \supset G$, содержащая решение. Если $\widetilde{G}$ выбрана в классе K, система *разрешима в* K.
Класс K *выделяется в классе* $L \supset K$ *конечной системой уравнений*, если над любой нетривиальной группой из K существует конечная система уравнений, разрешимая в L, но неразрешимая в K. Обозначение: $K \underset{e}{\subset} L$. Если это одно уравнение, то класс *выделяется одним уравнением* ($K \underset{e1}{\subset} L$).
Класс L *простой*, если для любых групп $G, H \in L$, любого $g \in G$ и любого $h \in H \setminus \{1\}$, существует группа $K \in L$, содержащая G и H как подгруппы, такая, что $g \in \ll h \gg \lhd K$.
Основная теорема, используемая для доказательства выделяемости (см. [1]):

Теорема 1. *Если в простом классе L не выполнено некоторое квазитождество q, то над каждой нетривиальной группой $G \in L$ существует конечная система уравнений, разрешимая в некоторой группе $\widetilde{G} \supseteq G$ из L, но не разрешимая в $\hat{G} \supseteq G$, удовлетворяющей квазитождеству q.*

Найден ряд непростых классов — разрешимые группы ступени $\leq s$ $(s \in \mathbb{Z},\ s \geq 2)$.
В [1] доказано, что класс абелевых групп выделяется одним уравнением в классе нильпотентных. Эта идея обобщается на случай $\{$нильпотентные ступени $\leq s\} \underset{e1}{\subset} \{$нильпотентные ступени $\leq s+1\}$.
Из [1] известно, что:

Утверждение 1. Следующие классы выделяются друг в друге:
$\{$абелевы$\} \underset{e1}{\subset} \{$нильпотентные$\} \underset{e}{\subset} \{$разрешимые$\} \underset{e}{\subset} \{$аменабельные$\} \underset{e}{\subset} \{$все группы$\}$.

Аналогично обобщается:

Утверждение 2. Следующие классы выделяются друг в друге:
$\{$конечные абелевы$\} \underset{e1}{\subset} \{$конечные нильпотентные$\} \underset{e}{\subset} \{$конечные разрешимые$\} \underset{e}{\subset} \{$все конечные$\}$,
$\{$конечные нильпотентные ступени $\leq s\} \underset{e1}{\subset} \{$конечные нильпотентные ступени $\leq s+1\}$.

Хотя и класс разрешимых групп ступени $\leq s$ непростой, можно доказать:

Утверждение 3. Класс разрешимых групп ступени $\leq s$ выделяется одним уравнением в классе разрешимых групп ступени $\leq s+1$ при $s \in \mathbb{N}$.

Установлены положения про финитно аппроксимируемые (ФА) группы.

Утверждение 4. Верны соотношения между классами:

- $\{\text{свободные}\} \underset{e}{\subset} \{\text{ФА}\}$.
- $\{\text{конечно порожденные нильпотентные}\} \underset{e}{\subset} \{\text{ФА}\}$.
- $\{\text{ФА}\} \underset{e1}{\subset} \{\text{все группы}\}$.
- Класс конечных групп не выделяется конечной системой уравнений в классе финитно аппроксимируемых групп.

Доклад основан на совместных результатах с д.ф.-м.н. А. А. Клячко.

Источники и литература

1) Buturlakin A.A., Klyachko A.A., Osin D.V., Equationally separable classes of groups, 2025, *arXiv:2502.05831v2.*