

**Квантовые симметрии алгебры тройных чисел**

**Научный руководитель – Гордиенко Алексей Сергеевич**

*Зазовский Леон Станиславович*

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия  
*E-mail: leon.zazovskii@math.msu.ru*

(Ко)модульные алгебры над алгебрами Хопфа возникают при изучении симметрий в алгебре, геометрии и теоретической физике. В частности, они интерпретируются как квантовые симметрии (в духе некоммутативной геометрии). В связи с этим возникает вопрос классификации действий алгебр Хопфа с точностью до эквивалентности.

Двойственной структурой к алгебре является коассоциативная коалгебра с коединицей. Если на  $H$  задана структура алгебры и коалгебры и они согласованны, то говорят, что задана биалгебра  $H$ . Если же на ней задан антипод, то  $H$  называют алгеброй Хопфа.

$H$ -действием на алгебре  $A$ , называют такое (ко)действие  $H$  как алгебры, что оно согласованно со структурой биалгебры  $H$ . В таком случае будем говорить, что  $A$  —  $H$ -(ко)модульная алгебра. В силу сказанного выше, можно определить коноситель  $H$ -действия, как подалгебру эндоморфизмов, отвечающую заданному (ко)действию.

Мы будем  $H$ -(ко)действия называть эквивалентными, если их коносители совпадают. Это позволяет свести вопрос о свойствах  $H$ -(ко)модульных алгебр к изучению конечного числа явно заданных  $H$ -(ко)модульных структур.

С каждым  $H$ -действием связан  $\zeta$  - гомоморфизм в алгебру линейных операторов на  $A$ , отметим, что  $\zeta(H)$  это в точности коноситель. В случае конечномерной алгебры  $A$ , выберем базис и отождествим алгебру линейных операторов на  $A$  с алгеброй матриц, тогда рассмотрим отдельные координатные функции  $\alpha_{ij}(h) := (\zeta(h))_{ij}$ .

Основными результатами являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $A = k[x]/(x^n)$  и пусть функции  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nm}, \alpha_{12}$  линейно независимы. Тогда  $\zeta(h)$  блочно диагональная, где блоки  $B_t$  одинакового размера  $q$ , причем размерность  $\zeta(H) = \frac{n(q+1)}{2}$ , а сами блоки связаны следующим соотношением  $B_t = \alpha_{22}^{\frac{tn}{q}} B_0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\psi : H \otimes A \rightarrow A$  — структура  $H$ -модульной алгебры с 1 на  $A = k[x]/(x^3)$ , где  $H$  — некоторая алгебра Хопфа, в поле  $k$  существует примитивный корень степени 2 и примитивный корень  $\theta$  степени 3. Выберем базис в  $A : \bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2$  и отождествим  $: \text{End}_k(A)$  с  $M_3(k)$ . Предположим, что коноситель действия — это подалгебра алгебры верхнетреугольных матриц. Тогда  $\psi$  эквивалентно одной из следующих модульных структур над  $A$ :

- 1) действие поля  $k$  на алгебре  $A$  умножением на скаляры;
- 2) действие групповой алгебры  $k\langle c \rangle_2$ , заданное равенством  $s\bar{x} = -\bar{x}$ ;
- 3) действие групповой алгебры  $k\langle c \rangle_3$ , заданное равенством  $s\bar{x} = \xi\bar{x}$ ,  
где  $\xi$  — примитивный корень из единицы степени 3;
- 4)  $H_9(\xi)$ -действие, заданное равенствами  $s\bar{x} = \xi\bar{x}$ ,  $v\bar{x} = \bar{1}$ ,  
где  $\xi$  — примитивный корень из единицы степени 3.