Секция «19.2 Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О невозможности поточечного представления функций некоторыми подсистемами системы Фабера-Шаудера

Научный руководитель – Лукашенко Тарас Павлович

Степанянц Петр Суренович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: petstep18@gmail.com

<p>Система Фабера–Шаудера, введённая Г. Фабером [1], является одним из ранних примеров базиса Шаудера в банаховых пространствах [2], а именно в пространстве $C[0;1]$. Позднее были изучены вопросы о представлении функций рядами по этой системе. Так, А.А. Талялян показал, что система Фабера–Шаудера является системой представления измеримых функций в смысле сходимости почти всюду [3], а из результатов П.Л. Ульянова следует, что она также является системой представления в пространствах $L_p[0;1]$ в смысле сходимости по норме [4]. В работе Р. Зинка [5] была получена характеристика подсистем системы Фабера–Шаудера, сохраняющих представление измеримых функций в смысле сходимости почти всюду. Это условие имеет вид

$$\mu(\varlimsup_{m\to\infty} V_m) = 1, \tag{1}$$

где μ — мера Лебега на отрезке $[0;1]$, а V_m — носитель функции с номером m из подсистемы. В.Г. Кротов показал, что условие (1) является необходимым и достаточным для того, чтобы подсистема оставалась системой представления в пространствах $L_p[0;1]$ в смысле сходимости по норме [6].

В данной работе рассматривается вопрос о представлении непрерывных функций рядами по подсистемам системы Фабера–Шаудера. Удаление даже одной функции нарушает базисность системы в $C[0;1]$, что означает невозможность представления непрерывных функций в смысле равномерной сходимости. Вообще говоря, при представлении непрерывной функции по любой неполной подсистеме невозможно гарантировать сходимость в двоично–рациональных точках вида $k/2^n$.

Рассмотрим подсистемы, образованные подпоследовательностью пачек системы Фабера–Шаудера (здесь пачкой называем набор функций с носителями одинаковой длины). Такие подсистемы, в частности, удовлетворяют условию (1). При этом установлено, что этого всё равно недостаточно для поточечной представимости даже простейшей функции $f \equiv 1$ на множестве $[0;1] \setminus D$, где D — множество всех двоично–рациональных точек. А именно, существует составленная из подпоследовательности пачек подсистема системы Фабера–Шаудера такая, что для любых коэффициентов ряда по данной подсистеме, найдется точка, не являющаяся двоично-рациональной, в которой соответствующий ряд не сходится к 1.</p>

Источники и литература

1) Faber G. Uber die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Deutsche Mathematiker-Vereinigung. 1910. V. 19. P. 104–112.

2) Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Mathematische Zeitschrift. 1927. V. 26. P. 47-65.

3) Талалян А.А. Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера // Известия АН Армянской ССР. Серия физико-математических наук. 1959. Т. 12. № 3 С. 3–12.
4) Ульянов П.Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. № 2, С. 3–52.
5) Zink R. On a theorem of Goffman concerning Schauder series // Proceedings of the American Mathematical Society. 1969. V. 21. № 3. P. 523–529.
6) Кротов В.Г. Представление измеримых функций рядами по системе Фабера–Шаудера и универсальные ряды // Известия АН СССР. Серия математическая. 1977. Т. 41. № 1. С. 215–229.