

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА НА
ПРИМЕРЕ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ**

Морозов Егор Павлович

Студент

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

в городе Сарове, Саров, Россия

E-mail: egor.p.morozov@gmail.com

Научный руководитель — Замазрашкин Николай Леонидович

Численное моделирование лучистой теплопроводности, описываемой нелинейными уравнениями, требует применения устойчивых разностных схем [1], например, чисто неявной схемы, поскольку явные схемы, обладая условной устойчивостью, накладывают жесткое ограничение на величину шага по времени, делае его слишком маленьким. Одной из ключевых проблем при этом остаётся решение больших систем линейных уравнений (СЛАУ), возникающих после аппроксимации. Стандартные итерационные методы характеризуются низкой скоростью сходимости на подробных сетках из-за медленного затухания длинноволновых компонент ошибки. Для устранения этого недостатка применяются многосеточные методы, позволяющие эффективно гасить высокочастотные и низкочастотные ошибки на сетках разного разрешения [2-4]

Практические расчеты подтверждают высокую надежность чисто неявной схемы, однако ее вычислительная стоимость остается значительной. В связи с этим актуальной задачей является ускорение данного подхода. В настоящей работе реализован многосеточный метод для решения нелинейного уравнения лучистой теплопроводности. Детальное описание алгоритма решения многосеточных уравнений представлено, например, в работе [5].

В данной работе было рассмотрено нелинейное уравнение теплопроводности, то есть оно имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \cdot (\chi(T)\nabla T) + f(T, \rho), \quad (1)$$

где E - энергия, t - время, $\chi(T)$ - коэффициент теплопроводности, T - температура, ρ - плотность.

Работоспособность разработанного алгоритма осуществлялась на

серии тестовых задач. Решение строилось на равномерных сетках с последующим сравнением полученных результатов с известным аналитическим решением. Ключевой особенностью реализованного подхода является применение V-цикла в рамках многосеточного метода [2]. Вычислительный процесс включает этапы последовательной рестрикции (переноса) системы на грубые сетки с использованием различных геометрических подходов, достижения высокой точности решения на наиболее грубом уровне и последующей пролонгации (интерполяции) решения обратно на исходные подробные сетки. В ходе исследования также был проведен сравнительный анализ времени счета в зависимости от выбора методов интерполяции и экстраполяции.

Результаты верификации показали высокую эффективность разработанного алгоритма. Применение трёхуровневого многосеточного метода позволило добиться существенного ускорения при сохранении точности.

Метод наиболее эффективен для многомерных задач на детальных сетках: степень ускорения расчётов масштабируется с ростом разрешения сетки, что делает подход перспективным для ресурсоёмкого моделирования.

Литература

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
2. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. В 2-х томах. Том 2. – М.: Издательство Московского университета, 2014. – 61 с
3. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1:5 (1961), С 922–927
4. Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ - 1966. - Т.6. №5. С. 861-883
5. Ладонкина М. Е., Милокова О. Ю., Тишкин В. Ф. Численный метод решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточного метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2010 - Т. 50 № 8 С. 1438–1461