

Сюръективное расстояние Громова–Хаусдорфа

Ибрагимов Джавид Эльчин оглу

Студент (магистр)

Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова,
Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: *ibcavid@gmail.com*

Классическое доказательство [1, Гл. 1, §3, теорема 2] теоремы Кантора–Бернштейна, в котором по инъективным отображениям $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ конструктивно строится биекция $f_\omega: X \rightarrow Y$ позволяет не только доказать равномощность множеств X и Y ($|X| = |Y|$), но и применить построенную биекцию в теории расстояния Громова–Хаусдорфа [2, 3, 4, 5].

Основной результат работы (следствие) показывает, что для произвольных (одинаковой мощности) метрических пространств X и Y инъективное d_{GH}^{in} , сюръективное d_{GH}^{sur} и биективное d_{GH}^{bi} расстояния Громова–Хаусдорфа совпадают.

В [6, теорема 4.6] доказано, что для однородных по мощности метрических пространств расстояние Громова–Хаусдорфа d_{GH} определяется парами инъективных d_{GH}^{in} , сюръективных d_{GH}^{sur} и даже биективных отображений d_{GH}^{bi} . В этом плане основной результат нашей работы является распространением части упомянутого результата (равенства трех последних расстояний) на произвольные метрические пространства.

Кроме того, предложенная нами формулировка теоремы Кантора–Бернштейна позволяет (теорема) более просто, на наш взгляд, получить упомянутую выше [6, теорема 3.1] редукцию двух произвольных отображений к биекции.

Для любых инъективных отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ существует такая биекция $f_\omega: X \rightarrow Y$, что для всякой точки $x \in X$ справедливо по крайней мере одно из следующих условий:

- 1) $f_\omega(x) = f(x)$;
- 2) $f_\omega(x) = g^{-1}(x)$.

Справедливость этой теоремы легко проверяется по любой публикации общепринятого доказательства теоремы Кантора–Бернштейна.

Мы будем писать $x \in I$, если точка x удовлетворяет условию 1) и $x \in II$, если точка x удовлетворяет условию 2).

Пусть на X и Y заданы метрики и пусть в описанных выше обозначениях отображения f и g удовлетворяют для некоторых чисел d_f^-, \dots условиям

$$-d_f^- \leq |f(x)f(x')| - |xx'| \leq d_f^+ \text{ для любых точек } x, x' \in X, \quad (1)$$

$$-d_g^- \leq |g(y)g(y')| - |yy'| \leq d_g^+ \text{ для любых точек } y, y' \in Y, \quad (2)$$

$$-d_{(f,g)}^- \leq |f(x)y| - |xg(y)| \leq d_{(f,g)}^+ \text{ для любых точек } x \in X, y \in Y. \quad (3)$$

Далее под d_f^+, \dots будет пониматься \inf (в рассматриваемой ситуации это \min) соответствующих чисел. Очевидно, что $d_{(g,f)}^+ = d_{(f,g)}^-$ и $d_{(g,f)}^- = d_{(f,g)}^+$. Обычно рассматривается *искажение* $\text{dis } f = \max\{d_f^+, d_f^-\}$, в терминах которого определяются d -изометрии, и *коискажение* $\text{codis}(f, g) = \max\{d_{(f,g)}^+, d_{(f,g)}^-\}$. Отображение f называется d -изометрией, если $\text{dis } f \leq d$. Однако односторонние оценки тоже имеют применения – так определяются d_f^+ -нерастягивающие отображения [7].

Эти понятия (числа) определяют *расстояние Громова–Хаусдорфа* [5, Theorem 7.3.25]

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \max \{ \text{dis } f, \text{codis}(f, g), \text{dis } g \} : f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X \}. \quad (4)$$

Иногда рассматривается *модифицированное расстояние Громова-Хаусдорфа* [8], которое является вычислительно (алгоритмически) более простым,

$$md_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \max \{ \text{dis } f, \text{dis } g \} : f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X \}. \quad (5)$$

В этом русле естественным образом определяется (*модифицированное*) *инъективное* $(m)d_{GH}^{in}(X, Y)$, *сюръективное* $(m)d_{GH}^{sur}(X, Y)$ и *биективное* $(m)d_{GH}^{bi}(X, Y)$ расстояние Громова-Хаусдорфа

$$d_{GH}^{bi}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \max \{ \text{dis } f, \text{codis}(f, g), \text{dis } g \} : f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X \text{ are bijective} \}. \quad (6)$$

Именно таким образом в работах [9, 10] определено *непрерывное расстояние Громова-Хаусдорфа* d_{GH}^c . Очевидно, что $md_{GH}^v \leq d_{GH}^v$ и $(m)d_{GH} \leq (m)d_{GH}^{in} \leq (m)d_{GH}^{bi}$, $(m)d_{GH} \leq (m)d_{GH}^{sur} \leq (m)d_{GH}^{bi}$, $(m)d_{GH} \leq (m)d_{GH}^c$.

Для биекции f имеют место равенства

$$d_{f^{-1}}^+ = d_f^-, \quad d_{f^{-1}}^- = d_f^+; \quad d_{(f, f^{-1})}^+ = d_f^+, \quad d_{(f, f^{-1})}^- = d_f^-.$$

Доказательство. Подставим в неравенства (1) $x = f^{-1}(y)$ и $x' = f^{-1}(y')$. Два последних равенства получаются подстановкой в неравенства (3) $y = f(x')$.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} d_{GH}^{bi}(X, Y) &= \frac{1}{2} \inf \{ \max \{ \text{dis } f, \text{codis}(f, f^{-1}), \text{dis } f^{-1} \} : f: X \rightarrow Y \text{ is bijective} \} \\ &= \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } f : f: X \rightarrow Y \text{ is bijective} \} = md_{GH}^{bi}(X, Y). \end{aligned}$$

Следствие показывает, что по крайней мере для конечных метрических пространств (одинаковой мощности) X и Y вычисление биективного расстояния между ними при вычислении последнего исключительно по определению требует перебора существенно меньшего числа случаев. Для конечных множеств X и Y одинаковой мощности для отображения $f: X \rightarrow Y$ понятия инъективности, сюръективности и биективности совпадают. Для отображения бесконечных множеств эти понятия попарно различны. Покажем, что для расстояния Громова-Хаусдорфа эти три разных класса отображений приводят к одному понятию (числу).

В описанных выше обозначениях справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |f(x)f_\omega(x)| &\leq \begin{cases} 0 & \text{при } x \in I, \\ \max \{ d_{(f, g)}^-, d_{(f, g)}^+ \} & \text{при } x \in II; \end{cases} \\ -d_f^- &\leq |f_\omega(x)f_\omega(x')| - |xx'| \leq d_f^+ \text{ для любых точек } x, x' \in I; \\ -d_g^+ &\leq |f_\omega(x)f_\omega(x')| - |xx'| \leq d_g^- \text{ для любых точек } x, x' \in II; \\ -d_{(f, g)}^- &\leq |f_\omega(x)f_\omega(x')| - |xx'| \leq d_{(f, g)}^+ \text{ для любых точек } x \in I, x' \in II. \end{aligned}$$

Доказательство. Для каждого случая приведем необходимые подробные выкладки.

Для каждой точки $x \in I$ точки $f(y)$ и $f_\omega(x)$ совпадают.

Для каждой точки $x \in II$ имеется такая точка y , что $x = g(y)$. И в этом случае $f_\omega(x) = y$ Тогда справедлива цепочка неравенств $-d_{(f,g)}^- = |xg(y) - d_{(f,g)}^-| \leq |f(x)y| = |f(x)f_\omega(x)| \leq |xg(y)| + d_{(f,g)}^+ = d_{(f,g)}^+$.

Для точек $x, x' \in I$ справедлива цепочка неравенств $|xx' - d_f^-| \leq |f(x)f(x')| = |f_\omega(x)f_\omega(x')| \leq |xx'| + d_f^+$.

Для точек $x, x' \in II$ справедлива цепочка неравенств $|xx' - d_g^+| = |gf_\omega(x)gf_\omega(x')| - d_g^+ \leq |f_\omega(x)f_\omega(x')| \leq |gf_\omega(x)gf_\omega(x')| + d_g^- = |xx'| + d_g^-$.

Для точек $x \in I$ и $x' \in II$ справедлива цепочка неравенств $|xx' - d_{(f,g)}^-| = |xgf_\omega(x')| - d_{(f,g)}^- \leq |f(x)f_\omega(x')| \leq |xgf_\omega(x')| + d_{(f,g)}^+ = |xx'| + d_{(f,g)}^+$.

Лемма 1. Для сюръективных отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ метрических пространств и однозначных селекций $\hat{f}: Y \rightarrow X$ и $\hat{g}: X \rightarrow Y$ их обратных отображений ($\hat{f} \subset f^{-1}$ и $\hat{g} \subset g^{-1}$) справедливы неравенства

$$-d_f^+ \leq |\hat{f}(y)\hat{f}(y')| - |yy'| \leq d_f^- \text{ для любых точек } y, y' \in Y;$$

$$-d_g^+ \leq |\hat{g}(x)\hat{g}(x')| - |xx'| \leq d_g^- \text{ для любых точек } x, x' \in X;$$

$$-d_{(f,g)}^- \leq |\hat{g}(x)y| - |x\hat{f}(y)| \leq d_{(f,g)}^+ \text{ для любых точек } x \in X, y \in Y.$$

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ это произвольные сюръективные отображения. По условию отображения \hat{f} и \hat{g} являются инъективными селекциями отображений f^{-1} и g^{-1} соответственно. Эти отображения характеризуются справедливостью для них равенств $f \circ \hat{f} = \text{Id}_Y$ и $g \circ \hat{g} = \text{Id}_X$ соответственно. Оценим их искажения и коискажения. Для каждого случая приведем необходимые подробные выкладки.

Для точек $y, y' \in Y$ точки $\hat{f}(y), \hat{f}(y') \in X$ выбраны так, что $f(\hat{f}(y)) = y$ и $f(\hat{f}(y')) = y'$. Поэтому $|\hat{f}(y)\hat{f}(y')| - d_f^- \leq |f(\hat{f}(y))f(\hat{f}(y'))| = |yy'| \leq |\hat{f}(y)\hat{f}(y')| + d_f^+$.

Случай отображения \hat{g} рассматривается аналогично.

Для точек $x \in X$ и $y \in Y$ справедлива цепочка неравенств $|x\hat{f}(y)| - d_{(f,g)}^- = |g\hat{g}(x)\hat{f}(y)| - d_{(f,g)}^- \leq |\hat{g}(x)f\hat{f}(y)| = |\hat{g}(x)y| \leq |g\hat{g}(x)\hat{f}(y)| + d_{(f,g)}^+ = |x\hat{f}(y)| + d_{(f,g)}^+$.

Для метрических пространств X и Y одной мощности имеют место равенства

$$d_{GH}^{bi}(X, Y) = d_{GH}^{in}(X, Y) = d_{GH}^{sur}(X, Y) = md_{GH}^{bi}(X, Y).$$

Доказательство. Неравенства $d_{GH}^{in}(X, Y) \leq d_{GH}^{bi}(X, Y)$ и $d_{GH}^{sur}(X, Y) \leq d_{GH}^{bi}(X, Y)$ очевидны. Неравенство $d_{GH}^{in}(X, Y) \leq d_{GH}^{sur}(X, Y)$ содержится в лемме 1.

Докажем неравенство $d_{GH}^{bi}(X, Y) \leq d_{GH}^{in}(X, Y)$. Достаточно рассмотреть случай $d_{GH}^{in}(X, Y) < \infty$. Для заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим такие инъективные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, что

$$\max\{\text{dis } f, \text{codis}(f, g), \text{dis } g\} < 2d_{GH}^{in}(X, Y) + 2\varepsilon.$$

Согласно предложению для биекции f_ω из теоремы справедливо неравенство $\text{dis } f_\omega \leq \max\{\text{dis } f, \text{codis}(f, g), \text{dis } g\} < 2d_{GH}^{in}(X, Y) + 2\varepsilon$. Согласно следствию справедливо неравенство $d_{GH}^{bi}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \text{dis } f_\omega < d_{GH}^{in}(X, Y) + \varepsilon$. Из произвольности положительного числа ε вытекает требуемое неравенство $d_{GH}^{bi}(X, Y) \leq d_{GH}^{in}(X, Y)$.

Для метрических пространств $|X| = |Y| = 2$ с $\text{diam } X = a > 0$ и $\text{diam } Y = a' > 0$ имеет место равенство

$$d_{GH}^{bi}(X, Y) = \dots = d_{GH}(X, Y) = md_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}|a - a'|.$$

Для метрических пространств $|X| = |Y| = 3$ с попарными расстояниями между точками $\text{dist } X = \{a \geq b \geq c > 0\}$ и $\text{dist } Y = \{a' \geq b' \geq c' > 0\}$ справедливы равенства

$$d_{GH}^{bi}(X, Y) = \dots = d_{GH}(X, Y) = md_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \max\{|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|\}.$$

Для любых чисел $a > d > 0$ имеются такие четырехточечные метрические пространства $|X| = |Y| = 4$, что справедливы равенства

$$d_{GH}^{bi}(X, Y) = d_{GH}^{sur}(X, Y) = d_{GH}^{in}(X, Y) = md_{GH}^{bi}(X, Y) = md_{GH}^{sur}(X, Y) = md_{GH}^{in}(X, Y) = a,$$

$$d_{GH}(X, Y) = d_{GH}^c(X, Y) = md_{GH}^c(X, Y) = md_{GH}(X, Y) = d.$$

Доказательство. Возьмем на координатной плоскости sup -норму. Пусть $X = \{A_- = (-2a, -d), A_+ = (-2a, d), B = (0, 0), C = (2a, 0)\}$ и $Y = \{A = (-2a, 0), B_- = (0, -d), B_+ = (0, d), C = (2a, 0)\}$. Для биективного отображения $f: X \rightarrow Y$ возможны следующие случаи.

1. Пусть $|f(A_-)f(A_+)| = 2d$. Без ограничения общности можно считать, что $f(A_-) = B_-$ и $f(A_+) = B_+$. Тогда $|f(B)f(C)| = 4a$. Поэтому $\text{dis } f \geq 2a$.

2. Пусть $|f(A_-)f(A_+)| = 2a$. Без ограничения общности можно считать, что $f(A_-) = A$ и $f(A_+) = B_+$.

Если $f(C) = C$, то $|A_+C| = 4a$ и $|f(A_+)f(C)| = 2a$. Поэтому $\text{dis } f \geq 2a$.

Если $f(B) = C$, то $|A_-B| = 2a$ и $|f(A_-)f(B)| = 4a$. Поэтому $\text{dis } f \geq 2a$.

Легко проверить, что для биекции, задаваемой формулой $f(A_-) = B_-$, $f(A_+) = B_+$, $f(B) = A$, $f(C)$, имеет место равенство $\text{dis } f = 2a$.

Пусть дано отображение $f: X \rightarrow Y$ множеств и в Y дано такое семейство подмножеств $\lambda_Y = \{U_\nu: \nu \in N\}$, покрывающее $f(X)$, т.е. $f(X) \subset \cup_{\nu \in N} U_\nu$, что $|U_\nu| \geq |X|$ для всякого индекса $\nu \in N$. Тогда существует такое вложение $f|_{|X|}: X \rightarrow Y$, что для всякой точки $x \in X$ точки $f|_{|X|}(x)$ и $f(x)$ лежат в одном элементе покрытия λ_Y .

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ фиксируем такой индекс ν_x , что $f(x) \in U_{\nu_x}$. Занумеруем точки X кардиналом $\tau = |X|: X = \{x_\alpha: \alpha < \tau\}$. Обозначим $X_\alpha = \{x_\beta: \beta < \alpha\}$ для $\alpha \leq \tau$. Трансфинитной индукцией по $\alpha \leq \tau$ построим такие вложения $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$, что для каждого $\beta < \alpha$ выполняются условия:

$$f_\alpha|_{X_\beta} = f_\beta \text{ и } f_\alpha(x_\beta) \in U_{\nu_{x_\beta}}.$$

Предположим, что для $\beta < \alpha$ построение проведено. Если α предельный ординал, то положим $f_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} f_\beta$.

Рассмотрим случай, когда α не предельный ординал, то есть $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta < \alpha$.

Определим $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$. Для $\gamma < \beta$ положим $f_\alpha(x_\gamma) = f_\beta(x_\gamma)$. Определим $f_\alpha(x_\beta)$. Положим $f_\alpha(x_\beta) = y$, где выбираем $y \in U_{\nu_{x_\beta}} \setminus (f_\beta(X_\beta))$.

Тогда отображение $f_\tau: X \rightarrow Y$ является искомым вложением.

Теперь легко получается редукция из работы [6, теорема 3.1] произвольных отображений к биекциям.

Пусть даны отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ множеств и такие их покрытия $\lambda_X = \{V_\mu\}$ и $\lambda_Y = \{U_\nu\}$ соответственно, что $|X| = |Y| = |V_\mu| = |U_\nu| = \tau$ для любых

индексов μ, ν . Тогда существует такая биекция $f_\omega: X \rightarrow Y$, что для всякой точки $x \in X$ справедливо по крайней мере одно из следующих условий:

- 1) $f_\omega(x)$ и $f(x)$ лежат в одном элементе покрытия λ_Y ;
- 2) $f_\omega^{-1}(y)$ и $g(y)$ лежат в одном элементе покрытия λ_X .

Доказательство. Согласно теореме существуют такие вложения $f_\tau: X \rightarrow Y$ и $g_\tau: Y \rightarrow X$, что $f_\tau(x) \in U_{\nu_x}$ и $g_\tau(y) \in V_{\mu_y}$ для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$. Теорема задает по вложениям f_τ и g_τ требуемую биекцию f_ω .

К сожалению метрика d_{GH}^{bi} не является полной. Достаточно взять неодноточечное метрическое пространство X конечного диаметра $\text{diam } X = d < \infty$. Тогда при $\lambda \rightarrow 0+$ подобные пространства λX образуют фундаментальную последовательность, у которой нет предела (в метрике d_{GH}^{bi}). Здесь для метрического пространства (X, ρ) и $\lambda > 0$ через λX обозначается $(X, \lambda\rho)$.

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Изд-во "Наука", Москва, 1976.
- [2] Edwards D. The Structure of Superspace // Studies in Topology / Ed. by N.M. Stavrakas and K.R. Allen, N.Y.; L.; San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.
- [3] Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes / Ed. by Lafontaine and Pierre Pansu. Paris, 1981. 1–120.
- [4] Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1999.
- [5] Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry, Graduate Studies in Mathematics, 33, AMS, Providence, RI, 2001.
- [6] С. А. Богатый, Е. А. Резниченко, А. А. Тужилин, Сюръективные отображения в теореме Хайерса–Улама и расстоянии Громова–Хаусдорфа, European Journal of Mathematics.
- [7] I. A. Vestfrid, Hyers-Ulam stability of isometries and non-expansive maps between spaces of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. 145, № 6 (2017), 2481–2494.
- [8] Mémoli F. Some properties of Gromov-Hausdorff distances. Discrete Comput Geom 48(2) (2012) 416–440.
- [9] Lim S., Mémoli F., Smith Z. The Gromov–Hausdorff distance between spheres, Geometry & Topology, 2023, 27, № 9, pp. 3733–3800.
- [10] S. A. Bogaty, A. A. Tuzhilin, Continuous Gromov–Hausdorff distance, Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova,