Задача о максимизации одноцветных компонент при раскраске вершин графа

Садыг Анвар Эмиль
Студент (бакалавр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: anver.sadiq20@gmail.com

Данная работа относится к области теории графов [1, 2] и посвящена исследованию свойств раскрасок вершин. Рассматривается задача о раскраске графа $G = (V, E)$ в k цветов, порождающей разбиение множества вершин на k непустых непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \ldots, V_k$, где каждое V_i — это множество вершин i-го цвета. Дополнительным условием является требование связности каждого подграфа, порожденного множеством V_i. Для каждой такой раскраски f из множества всех допустимых раскрасок $\mathcal{F}$ можно определить величину $s(f) = \min_{1 \leq i \leq k} |V_i|$, представляющую собой размер минимальной одноцветной компоненты. Целью работы является нахождение значения $M(G, k)$, которое определяется как максимум величины $s(f)$ по всем возможным раскраскам:

$$M(G, k) = \max_{f \in \mathcal{F}} \left(\min_{1 \leq i \leq k} |V_i| \right)$$

Основная задача исследования заключается в получении точных значений $M(G, k)$ для различных классов графов, так как эта величина зависит от топологической структуры графа и количества доступных цветов.

Основные результаты:

- **Полные графы и циклы:** Для графов K_n и C_n доказано $M(G, k) = \lfloor n/k \rfloor$. Для циклов это достигается за счет последовательного разбиения структуры на дуги.
- **Граф-звезда S_n:** Структура с единственным центром накладывает ограничения: при $k > 2$ любая компонента, не содержащая центр, состоит из одной вершины, что дает $M(S_n, k) = 1$.
- **Граф-колесо W_n:** Установлено значение $M(W_n, k) = \lfloor n/k \rfloor$. Стратегия включения центра в одну из компонент позволяет свести задачу к анализу остаточного пути на ободе.
- **Гиперкубы Q_n:** Для n-мерного куба ($N = 2^n$) получено $M(Q_n, k) = \lfloor 2^n/k \rfloor$. Доказательство строится конструктивно через Гамильтонов путь (код Грея).

Лемма (О разбиении пути). Для графа-пути P_n выполняется равенство $M(P_n, k) = \lfloor n/k \rfloor$. *Доказательство.* По принципу Дирихле $\lfloor n/k \rfloor$ — верхний предел для минимума. Достижимость доказана разделением пути на блоки из $\lfloor n/k \rfloor$ или $\lceil n/k \rceil$ идущих подряд вершин, которые по определению P_n образуют связные компоненты.

Список литературы

[1] Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 207 с.

[2] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.