

**Двумерная задача дивергенция ротор с граничными условиями Дирихле в
кольцевой области**

Хасанджанова Арина Ренатовна

Студент (бакалавр)

Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова,
Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: arinahasandjanova@gmail.com

Краевые задачи для системы уравнений дивергенция-ротор имеют важное прикладное значение в электростатике и гидродинамике. Они были предметом многих исследований [1]-[3]. В двумерном случае система

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = f, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

описывает безвихревое поле \mathbf{E} с заданным источником f . С условием Дирихле для разрешимости системы требуется выполнение условия согласования правой части и краевого условия.

Постановка задачи. В кольцевой области

$$K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0 < |x| < r_1\}$$

требуется найти $\mathbf{E} = (E_\rho, E_\theta)$, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = f(r, \varphi), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{E}|_{\partial K} = u(x), \end{cases}$$

с заданными непрерывными функциями f, u .

Решение ищется в виде ряда Фурье по φ :

$$E_\rho = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_{\rho,k}(r) e^{ik\varphi}, \quad E_\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_{\theta,k}(r) e^{ik\varphi}, \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(r) e^{ik\varphi}.$$

Для каждой гармоники k получается система ОДУ, решаемая методом вариации постоянных.

Условия разрешимости. Применяя формулу Грина к комбинациям уравнений с произвольными голоморфными функциями $\Phi(z)$, где $z = x_1 + ix_2$, получаем необходимое условие:

$$\int_K f \Phi(z) dx = \oint_{\partial K} (u \cdot \mathbf{n}) \Phi(z) dl - i \oint_{\partial K} u \Phi(z) d\mathbf{l}.$$

Достаточное условие: требование для произвольной голоморфной функции можно свести к проверке лишь для счётного множества функций вида z^k . Коэффициенты Фурье поля при этом восстанавливаются однозначно.

В частном случае при $u = 0$ эти соотношения принимают вид

$$\int_K f z^k dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

означающие ортогональность f всем функциям z^k в области K .

Таким образом, необходимые и достаточные условия разрешимости задачи div-rot в кольце с условием Дирихле задаются интегральными равенствами для счётного семейства функций z^k .

Источники и литература

- 1) Auchmuty G., Alexander J.C. L^2 well-posedness of planar div-curl systems // Arch. Ration. Mech. Anal. 2001. Vol.160. P.91-134.
- 2) Delgado B.B., Macías-Díaz J.E. An exterior Neumann boundary-value problem for the div-curl system and applications // Mathematics. 2023. Vol.9.
- 3) Kirchhart M., Schulz E. Div-curl problems and regular stream functions in 3D Lipschitz domains // Math. Methods Appl. Sci. 2021. Vol.45. P.1097-1117.