Секция «Математика»

Отображения малой кратности на подмножестве

Ибрагимов Джавид Эльчин оглу
Студент (магистр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: ibcavid@gmail.com

Известно [2], теорема 3, что отображение метрического компакта X в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$, при котором прообразы плоскостей заданной размерности d состоят из не более чем $(d+1)$-ой точки, играют важную роль в задачах интерполяции и оптимальной аппроксимации с маломерным многогранником Чебышева. В [1] изучается вопрос массивности множества отображений, при которых прообразы плоскостей заданной размерности d состоят из не более чем q точек. Мы исследуем вопрос массивности множества отображений пространства X, которые малократны на заданном подмножестве $F \subset X$. Показано, что для σ-компактного подмножества F ответ определяется топологией подмножеста (его размерностью $\dim F$) (теорема 1), а для общего подмножества ответ определяется топологией объемлющего пространства X (его размерностью $\dim X$) (теорема 2).

Для пространства X на пространстве $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ всех ограниченных непрерывных отображений мы рассматриваем топологию равномерной сходимости. Это полное метрическое пространство. Под Π^d всегда понимается некоторая d-мерная плоскость в рассматриваемом линейном пространстве. Для подмножества $F \subset X$ и натурального q рассмотрим пространство

$$\mathcal{R}_F^{d,q}(X, \mathbb{R}^m) = \left\{g \in C^*(X, \mathbb{R}^m) \colon |F \cap g^{-1}(\Pi^d)| \leq q \text{ для всякой плоскости } \Pi^d\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть F это σ-компактное метризуемое подмножество нормального пространства X и $\dim F \leq n$. Тогда при $m \geq n+1$, $d \leq m-n-1$ и $q = d+1+\left[\dfrac{n+nd}{m-n-d}\right]$ множество $\mathcal{R}_F^{d,q}(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ-подмножество в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.*

Напомним, что метризуемое пространство называется *счетно-мерным*, если оно является объединением счетного числа конечномерных подмножеств. К. Нагами доказал, что всякое метризуемое счетно-мерное пространство Y является объединением $Y = \cup_{i=1}^{\infty} Y_i$ возрастающей последовательности $Y_i \subset Y_{i+1}$ нульмерных подмножеств $\dim Y_i \leq 0$, $i = 1, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть X это нормальное пространство, а целые числа $d \geq 0$ и $q \geq 1$ такие, что для любого метризуемого (сепарабельного) 0-мерного подмножества $F \subset X$ пространство $\mathcal{R}_F^{d,q}(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ-подмножество $C^*(X, \mathbb{R}^m)$. Тогда для любого метризуемого (сепарабельного) счетно-мерного $Y \subset X$ пространство $\mathcal{R}_Y^{d,q}(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ-подмножество $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.*

Для непрерывного ограниченного отображения $h \colon A \to \mathbb{R}^m$ замкнутого подмножества $A \subset X$ рассмотрим пространство

$$C_h^*(X, \mathbb{R}^m) = \left\{g \in C^*(X, \mathbb{R}^m) \colon g_{|_A} = h\right\}.$$

Если $h \in \mathcal{R}^{d,k}(A, \mathbb{R}^m)$, то $\mathcal{R}_F^{d,q}(X, \mathbb{R}^m) \cap C_h^*(X, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{R}_{A \cup F}^{d,k+q}(X, \mathbb{R}^m)$. Оценка $k+q$ кажется грубой. Случай $d=0$, $m \geq 2n+1$ и $k=q=1$ представляет особый интерес.

Следствие 3. *Пусть для замкнутого подмножества* $A \subset X$ *метрического компактного пространства* X, $\dim X = n \geq 2$, *непрерывное отображение* $h\colon A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2n+1$, *является вложением на ручной компакт* $h(A)$. *Тогда множество продолжающих вложений* $\mathcal{R}_h^{0,1}(X, \mathbb{R}^m) = \mathcal{R}^{0,1}(X, \mathbb{R}^m) \cap C_h(X, \mathbb{R}^m)$ *является плотным* G_δ*-множеством в пространстве* $C_h(X, \mathbb{R}^m)$.

Источники и литература

1) Богатый С.А., Вылов В.М. Вложения Робертса и обращение трансверсальной теоремы Тверберга // Матем. сб. 2005, т. 196, № 11, с. 33-52.
2) Болтянский В.Г., Рышков С.С., Шашкин Ю.А. О k-регулярных вложениях и их применении к теории приближения функций // УМН. 1960, т. 15, № 6, с. 125-132.