

Математические модели струн музыкальных инструментов

Ханжишиев Мурад Огтай оглу

Студент (бакалавр)

Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова,
Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан

E-mail: muradkhv@mail.ru

Работа посвящена исследованию музыкальных тонов, обертонов и их математического описания. Рассмотрены уравнения колебаний струны, резонанс и принципы настройки инструментов.

Основные идеи

Музыкальные звуки определяются частотами. Древние греки установили соотношения, создающие гармоничные интервалы: $1/2$ (октава), $2/3$ (квинта), $3/4$ (кварта), $4/5$ (большая терция). Позднее введена равномерная темперация (12 полутонов), на которой основана современная музыкальная шкала.

Обертоны и уравнение струны

Обертоны (также называемые гармониками) — это компоненты звука, которые представляют собой колебания с частотами, кратными основной частоте. Например, если основная частота равна f , то частоты обертонов будут $2f, 3f, 4f$ и так далее. Они играют ключевую роль в определении тембра звука.

Математическая модель

Рассматривается уравнение колебаний струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin(\omega t); t > 0, x \in (0, l), \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

На основе полученного решения объясняется явление обертонов на струне. Из полученной связи между длиной струны и частотой колебаний, и требования равномерного деления октавы на 12 полутонов, выводится логарифмическая шкала расположения ладов на гитаре.

Источники и литература

- 1) Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. С. 512.
- 2) Чечкин Г.А., Капустина Т.О., Чечкина Т.П. Уравнения в частных производных. М.: курс, 2019. С. 136.
- 3) Шилов Г.Е. Устройство музыкальной шкалы. М.: Физматгиз, 1963. С. 20.