Конференция «Международная площадка конференции "Ломоносов-2025" в Азербайджане»

Секция «Математика»

Задача о монотонной m-раскраске k-ичного 2-мерного куба

Садыг Джафар Эмиль оглу
Студент (бакалавр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: jafar.sadig04@gmail.com

Данная работа посвящена теории графов [1, 2]. Рассматривается задача монотонной раскраски вершин ориентированного n-мерного k-ичного куба ($k \geq 2$), при которой каждое ребро направлено от вершины с меньшим цветом к вершине с большим. Требуется найти минимальное количество цветов χ, необходимое для раскраски графа, при условии, что в один цвет можно покрасить не более m вершин ($m \geq 2$).

Для случая $k = 2$ ранее были получены следующие результаты.

Теорема 1 (Аюбов К.И., 2020). *Для монотонной* 2*-раскраски* $\vec{B}^n$ *выполняется равенство* $\chi(\vec{B}^n) = 2^{n-1} + 1$.

Теорема 2 (Садыг Д.Э., 2024). *Для монотонной* 3*-раскраски* $\vec{B}^n$ *выполняется равенство* $\chi(\vec{B}^n) = \lceil 2^n/3 \rceil + 1$.

В данной работе рассматривается случай $n = 2$, $k \geq 3$ и $m \geq 2$.

Теорема 3. *Пусть G – ориентированный 2-мерный k-ичный куб, $k \geq 3$. Тогда минимальное количество цветов для m-раскраски:*

1) *Если $m \geq k$, то $\chi(G) = 2k + 1$.*
2) *Если $mlt; k$, то $\chi(G) = 2m + \left\lceil \frac{k^2 - m(m+1)}{2} \right\rceil$.*

Нижняя оценка доказывается из мощностных соображений. Для доказательства верхней оценки приводится метод раскраски куба.

Источники и литература

1) Робин Уилсон. Введение в теорию графов. М.: МИР, 1977
2) Харари Ф. Теория графов. М.: МИР, 1973