Секция «Математика»

О задаче с односторонней связью

Юнин Максим Александрович
Студент (бакалавр)
Бакинский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Факультет прикладной математики, Баку, Азербайджан
E-mail: maksman038@gmail.com

В работе исследуется задача диффузии в среде, состоящей из двух различных материалов, зона контакта между которыми имеет микронеоднородную структуру, контакт является достаточно слабым и подчиняется закону односторонней связи. Целью работы является построение эффективной математической модели, описывающей поведение такой среды «в среднем».

Постановка задачи.

Пусть $Q = \omega \times (-l, l)$ — открытый ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^n$, $l > 0$, ω — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Предполагается, что Q состоит из двух частей Q_ε^+ и Q_ε^-, разделенные осциллирующей границей $\Gamma_\varepsilon = \{x \in Q, x_n = \varepsilon^k g(\frac{x'}{\varepsilon})\}$, где $k > 0$, $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$ и $g : (0,1)^{n-1} \to \mathbb{R}$ — периодическая положительная Липшицева функция, $\overline{g} = \max g$, а ε — малый положительный параметр. При этом

$$Q_\varepsilon^+ = \{x \in Q, x_n > \varepsilon^k g(\frac{x'}{\varepsilon})\}, \qquad Q_\varepsilon^- = \{x \in Q, x_n < \varepsilon^k g(\frac{x'}{\varepsilon})\}.$$

Мы предполагаем, что

$$\omega \times (0, \varepsilon^\kappa \overline{g}) = B_\varepsilon^+ \cup B_\varepsilon^- \cup \Gamma_\varepsilon \qquad B_\varepsilon^+ = \omega \times (0, \varepsilon^\kappa \overline{g}) \cap Q_\varepsilon^+, \quad B_\varepsilon^- = \omega \times (0, \varepsilon^\kappa \overline{g}) \cap Q_\varepsilon^-.$$

Обозначим $Y = (0,1)^n$ и $Y' = (0,1)^{n-1}$, а также пусть h является Y'-периодической функцией, удовлетворяющей $h \in L_\infty(\Gamma)$, $0 < h_0 < h(y')$ почти всюду на $\Gamma = \{y_n = g(y'), y' \in Y'\}$, $h_0 > 0$, $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$. Обозначим $h^\varepsilon(x') = h(\frac{x'}{\varepsilon})$.

Цель работы — изучить асимптотическое поведение решений следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon + a(x) u_\varepsilon = f \qquad \text{в } Q \setminus \Gamma_\varepsilon, \\ (\nabla u_\varepsilon)^- \cdot n_\varepsilon = (\nabla u_\varepsilon)^+ \cdot n_\varepsilon \qquad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ (\nabla u_\varepsilon)^+ \cdot n_\varepsilon = \varepsilon^{1-\kappa} h^\varepsilon (u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-) \qquad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \qquad \text{на } \partial Q \end{cases} \tag{1}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $a(x)$ — ограниченная функция.

Пусть A^0 — усреднённый тензор, определяемый через решение вспомогательной задачи (см. [1]). Обозначим $Q^+ = Q \cap \{x : x_n > 0\}$, $Q^- = Q \cap \{x : x_n < 0\}$, $\Gamma_0 = Q \cap \{x : x_n = 0\}$, а также

$$G_1 = \frac{1}{|Y'|} \int\limits_{Y'} h (1 + (|\nabla g|^2)^{1/2} \, dy', \quad G_2 = \frac{1}{|Y'|} \int\limits_{Y'} h \, dy', \quad G_3 = \frac{1}{|Y'|} \int\limits_{Y'} h |\nabla g| \, dy'.$$

Имеет место утверждение.

Теорема 1. • *Самоподобный случай ($\varkappa = 1$). В этом случае предельная (усреднённая) задача имеет вид*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^0\nabla u) + a(x)u = f \qquad \text{в } Q \setminus \Gamma_0, \\ (A^0\nabla u)^- \cdot n = (A^0\nabla u)^+ \cdot n \qquad \text{на } \Gamma_0, \\ (A^0\nabla u)^+ \cdot n = G_1(u^+ - u^-) \qquad \text{на } \Gamma_0, \\ u = 0 \qquad \text{на } \partial Q. \end{cases} \tag{2}$$

• *Плоский случай ($\varkappa > 1$). В этом случае предельная (усреднённая) задача имеет вид*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^0\nabla u) + a(x)u = f \qquad \text{в } Q \setminus \Gamma_0, \\ (A^0\nabla u)^- \cdot n = (A^0\nabla u)^+ \cdot n \qquad \text{на } \Gamma_0, \\ (A^0\nabla u)^+ \cdot n = G_2(u^+ - u^-) \qquad \text{на } \Gamma_0, \\ u = 0 \qquad \text{на } \partial Q. \end{cases} \tag{3}$$

• *Быстро осциллирующая граница ($0 < k < 1$). В этом случае предельная (усреднённая) задача имеет вид*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^0\nabla u) + a(x)u = f \qquad \text{в } Q \setminus \Gamma_0, \\ (A^0\nabla u)^- \cdot n = (A^0\nabla u)^+ \cdot n \qquad \text{на } \Gamma_0, \\ (A^0\nabla u)^+ \cdot n = G_3(u^+ - u^-) \qquad \text{на } \Gamma_0, \\ u = 0 \qquad \text{на } \partial Q. \end{cases} \tag{4}$$

Источники и литература

1) Donato P., Piatnitski A. On the effective interfacial resistance through rough surfaces // Commun. Pure Appl. Anal. **9**:5 (2010), 1295–1310.