Весовая оценка одного дискретного квазилинейного оператора

Серимбетова А.М.
Магистрант
Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
г. Астана, Казахстан
mraenad8524676@gmail.com

Пусть $0 < p, r, q < \infty, \omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}, u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$-положительные последовательности, $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$- неотрицательная последовательность. Через $l_{p,u}$ обозначим пространство последовательностей действительных чисел $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ для которых конечен следующий функционал: $\|f\|_{p,u} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Рассмотрим следующее весовое дискретное неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^q \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_k \sum_{i=k}^{\infty} f_i|^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j f_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in l_{p,u}, \tag{1}$$

для дискретного квазилинейного оператора K следующего вида:

$$(Kf)_n := \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_k \sum_{i=k}^{\infty} f_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{2}$$

В 2013 году в работе [1] В. И. Буренков и Р. Ойнаров нашли необходимые и достаточные условия ограниченности многомерного оператора типа Харди, действующего из пространства Лебега $L_{p,u}(R^n)$ в локальное пространство Морри $LM_{q\theta,w}(R^n)$. А до этого в 2008 году Р. Ойнаров и А. Калыбай в работе [2] впервые исследовали интегральный случай неравенства (1) и нашли условия выполнения этого неравенства при $0 < r < \infty, 1 \leq p \leq q < \infty$. С этих работ берет начало изучение квазилинейных неравенств типа Харди, которые исследовались такими учеными, как Р. Ойнаров, А. Гогаташвили, Р. Мустафаев, Л.-Э. Персон, Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов, А.Л. Бернардис, П.О. Сальвадор, А. Калыбай, Г.Е. Шамбилова, М.Крепела. В отличии от непрерывного случая дискретный случай начали изучать только в последнее десятилетие, например в работах Р. Ойнарова, А. Гогаташвили, М. Крепела, А.М. Темирхановой, Б.К. Омарбаевой и др.(см. [3]-[6]). Отметим, что по сравнению с интегральным неравенством типа Харди у дискретного неравенства диапазон параметра шире, так как интегральные неравенства типа Харди при $0 < p \leq 1$ выполняются только для тривиальных случаев. А вот их дискретный аналог выполнятся уже при $0 < p < \infty$.

Целью работы является нахождение критерия выполнения неравенства (1) для следующих случаев:

а) $0 < r < p = 1 < q$;
б) $0 < r < q < p = 1$.

Теорема 1. *Пусть $0 < r < p = 1 < q$. Тогда весовое неравенство (1) для дискретного квазилинейного оператора K вида (2) выполняется тогда и только тогда, когда $A = \max\{A_1, A_2\} < \infty$, где*

$$A_1 = \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{i} \varphi_j^r\right)^{\frac{1}{1-r}} \Delta\left(\bar{u}_i^{\frac{r}{1-r}}\right)\right)^{\frac{1-r}{r}},$$

$$A_2 = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{-q}\left(\sum_{i=j}^{k}\varphi_i^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}(\bar{u}_k)^{\frac{1-r}{r}},$$

при

$$\Delta\bar{u}_j = \bar{u}_j - \bar{u}_{j+1}, j \geq 1, \bar{u}_k = \sup_{k\leq n<\infty} u_n^{-1}.$$

Кроме того $C \approx A$, где C-наименьшая константа неравенства (1).

Теорема 2. *Пусть $0 < r < q < p = 1$. Тогда весовое неравенство (1) для дискретного квазилинейного оператора K вида (2) выполняется тогда и только тогда, когда $B = \max\{B_1, B_2\} < \infty$, где*

$$B_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\Delta\left(\bar{u}_j^{\frac{r}{1-r}}\right)\left(\sum_{i=k}^{j}\varphi_i^r\right)^{\frac{1}{1-r}}\right)^{\frac{q(1-r)}{r(1-q)}}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i^q\right)^{\frac{q}{1-q}}\omega_k^q\right)^{\frac{1-q}{q}},$$

$$B_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i^q\left(\sum_{j=i}^{k}\varphi_j^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{1-q}}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\Delta\left(\bar{u}_j^{\frac{r}{1-r}}\right)\right)^{\frac{q-r}{r(1-q)}}\Delta\left(\bar{u}_k^{\frac{r}{1-r}}\right)\right)^{\frac{1-q}{q}},$$

при

$$\Delta\bar{u}_j = \bar{u}_j - \bar{u}_{j+1}, j \geq 1, \bar{u}_k = \sup_{k\leq n<\infty} u_n^{-1}.$$

Кроме того $C \approx B$, где C-наименьшая константа неравенства (1).

Библиографический список

1. Burenkov R., Oinarov R. // Banach Journal Math., 2008. I. 2. P. 85–93.

2. Oinarov R., Kalybay A.A. Three-parameter weighted Hardy type inequalities // Banach Journal Math., 2008. I. 2. P. 85–93.

3. Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.-E. Some new iterated Hardy- type inequalities // J. Func. Spaces Appl., 2012. P. 1–31.

4. Gogatishvili A., Křepela M., OĽhava R., Pick L. Weighted inequalities for discrete iterated Hardy operators // Mediterr. J. Math. , 2020. Vol. 17. I. 4. P. 132–148.

5. Oinarov R., Omarbayeva B.K., Temirkhanova A.M. Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science., 2020. Vol. 105. I. 1. P. 19–29.

6. Kalybay A., Temirkhanova A.M., Zhangabergenova N. On iterated discrete Hardy type inequalities for a class of matrix operators // Analysis Mathematica, 2023. Vol. 49. I. 1. P. 137–150.