Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

# О пучке паросочетаний графа и свойствах его характеристического многочлена

**Научный руководитель – Ирматов Анвар Адхамович**

***Болотников Алексей Игоревич***

*Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

*E-mail: bolotnikov-94@mail.ru*

Пусть G(V,E), |E|=n - граф без петель и кратных ребер. Рассмотрим в пространстве $R^n$ следующие гиперплоскости: для любой последовательности ребер $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$, образующей простой незамкнутый путь или простой цикл четной длины в графе G, берем гиперплоскость $x_1 - x_2 + x_3 - ...x_n = 0$. Все такие гиперплоскости образуют некоторый пучок гиперплоскостей. Данный пучок назовем пучком гиперплоскостей паросочетаний графа. Данный пучок будет далее обозначаться $PA(G)$.

Для $PA(G)$ получены следующие результаты:

**Утверждение 1.** Пусть $G_1$, $G_2$ -графы без петель, кратных ребер и изолированных вершин, причем $PA(G_1)$ и $PA(G_2)$ идентичны друг другу. Тогда $G_1$ и $G_2$ изоморфны, за исключением случая, когда один из графов содержит компоненту связности, изоморфную $K_3$, а другой - компоненту, изоморфную $K_{1,3}$.

**Утверждение 2.** Пусть G(V,E), |E|=n - граф без петель и кратных ребер. Выберем произвольный регион пучка $PA(G)$ и выберем два вектора из этого региона. Для каждого вектора рассмотрим задачу о максимальном паросочетании в графе G с этим вектором в качестве вектора весов на ребрах. Утверждается, что эти две задачи имеют одно и то же решение, т.е. для обоих векторов одно и то же паросочетание будет иметь наибольший вес.

Для характеристического многочлена $\chi_{PA(G)}(t)$ пучка $PA(G)$ получены следующие результаты:

**Утверждение 3.**: Пусть $PA_1(G)$ и $PA_2(G)$ - два пучка гиперплоскостей, полученных для двух различных нумераций ребер графа G. Тогда их характеристические многочлены равны.

**Утверждение 4**: Пусть G - граф без петель, кратных ребер и изолированных вершин, $G_1, G_2, ..., G_k$ - его компоненты связности. Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = \chi_{PA(G_1)} \cdot \chi_{PA(G_2)} \cdot ... \cdot \chi_{PA(G_k)}$

**Утверждение 5.**: Пусть исходный граф G(V,E), |E|=n - дерево. Тогда характеристический многочлен пучка PA(G) равен $\chi_{PA(G)}(t) = (t-1)(t-2)...(t-n)$.

**Утверждение 6**: Пусть $G_1$, $G_2$ -графы без петель и кратных ребер, причем существуют подграфы $H_1 \subset G_1, T_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2, T_2 \subset G_2$ такие, что:

1) $G_1 = H_1 \cup T_1, G_2 = H_2 \cup T_2$
2) $H_1 \cap T_1 = \{u\}, H_2 \cap T_2 = \{v\}$, где u - вершина в $G_1$, v - вершина в $G_2$
3) существует изоморфизм из $H_1$ в $H_2$, переводящий u в v
4) $T_1$ и $T_2$ - деревья с одинаковым ненулевым количеством ребер

Тогда $\chi_{PA(G_1)} = \chi_{PA(G_2)}$.

## Источники и литература

1) T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1975, vol 1, issue 154
2) C.Greene, T. Zaslavsky, *On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs*, Transactions of the American Mathematical Society, 1983,vol 280, issue 1,pages 97–126
3) R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics* ,vol 1, edition 2, Cambridge University Press, 2011
4) R.P.Stanley, *An Introduction to Hyperplane Arrangements*, IAS/Park City Mathematics Series, 2004, vol 13: *Geometric Combinatorics*,pages 389–497
5) H. Whitney, *Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs*, American Journal of Mathematics,1932,vol 54,issue 1, pages 150–168