Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию (0, 1)-векторов.

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Штейнер Павел Михайлович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: pashteiner@ya.ru

Пусть $v^{\downarrow}$ обозначает вектор, полученный из вектора v перестановкой координат в порядке невозрастания.

Определение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда вектор a *мажорируется* вектором b ($a \preceq b$), если

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^{\downarrow} \leq \sum_{j=1}^{k} b_j^{\downarrow} \quad \text{при } k = 1, \ldots, n-1 \text{ и } \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все координаты которого равны 1. J обозначает $n \times n$ матрицу из единиц, $P(n)$ — множество $n \times n$ матриц перестановки. Множество $(0, 1)$-векторов размера n обозначается $\{0, 1\}^n$.

Теорема 1. Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, где $n \neq 3$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Для любых $a, b \in \{0, 1\}^n$ из $a \preceq b$ следует $\phi(a) \preceq \phi(b)$.
2) Для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ из $a \preceq b$ следует $\phi(a) \preceq \phi(b)$.
3) Выполнено одно из следующих утверждений:
   а) $\Phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$.
   б) $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и некоторой $P \in P(n)$.

Эквивалентность условий 2) и 3) была доказана Андо в 1989 году [1].

Теорема 2. Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^3$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Для любых $a, b \in \{0, 1\}^3$ из $a \preceq b$ следует $\phi(a) \preceq \phi(b)$.
2) Выполнено одно из следующих утверждений:
   а) $\Phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$.
   б) $\Phi(x) = \alpha P_1 x + \beta P_2 x + \gamma P_3 x$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $P_1, P_2, P_3 \in P(3)$ с условием $P_1 + P_2 + P_3 = J$.

Автор доклада благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и ценные обсуждения. Докладчик является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118**, 163—248 (1989).

2) G. Dahl, A. Guterman, and P. Shteyner. Majorization for matrix classes. *Linear Algebra Appl.*, **555**, 201–221 (2018).
3) G. Dahl, A. Guterman, and P. Shteyner. Majorization for (0,1)-matrices. *Linear Algebra Appl.*, **585**, 147–163 (2020).
4) A. Guterman, and P. Shteyner. Linear converters of weak, directional and strong majorizations. *Linear Algebra Appl.*, **613**, 320–346 (2021).
5) A. Guterman, and P. Shteyner. Linear operators preserving strong majorization of (0,1)-matrices, *preprint*.