Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Автоморфизмы тотального гиперграфа кольца квадратных матриц

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Максаев Артем Максимович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: artmak95@mail.ru

В 2008 году Д. Андерсон и А. Бадави (см. [1]) ввели понятие тотального графа коммутативного кольца с единицей, а в статье [2] аналогичные графы были рассмотрены и над некоммутативными кольцами. Для кольца квадратных матриц $M_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ вершинами этого графа является все множество $M_n(\mathbb{F})$, и две различные матрицы A, B соединяются ребром, если и только если $\det(A+B)=0$. Будем обозначать этот граф через $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

Для подробного изучения отношения, определяющего граф, полезно знать структуру его группы автоморфизмов. Поэтому вопрос описания автоморфизмов тотального графа представляет особый интерес. Напомним, что автоморфизмом графа называется биекция на множестве его вершин, строго сохраняющая отношение их смежности.

В 2017 году математики Джоу, Вонг и Ма (см. [3, теорема 1.2]) доказали, что всякий автоморфизм σ графа $\mathcal{T}_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов нечетной характеристики, имеет следующий вид:

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}Q \quad \text{для любой матрицы } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{F}_q)$$

или

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{pmatrix}Q \quad \text{для любой матрицы } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{F}_q),$$

где P, Q — невырожденные матрицы над полем $\mathbb{F}_q$, а f — некоторый автоморфизм поля $\mathbb{F}_q$.

На данный момент, вопрос описания автоморфизмов графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ при $n>2$ остается открытым для произвольного поля $\mathbb{F}$. Это обстоятельство побуждает изучить схожие вопросы, с ослабленным условием на автоморфизм. Одним из таких вопросов является описание автоморфизмов тотального гиперграфа кольца квадратных матриц.

Определение. Тотальным гиперграфом кольца квадратных матриц $M_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ назовем 3-униформный гиперграф с множеством вершин $M_n(\mathbb{F})$ такой, что различные матрицы A, B, C соединяются гиперребром, если и только если $\det(A+B+C)=0$.

В докладе будет представлено полное описание автоморфизмов этого гиперграфа в случае произвольного поля $\mathbb{F}$ характеристики не 2 и не 3, то есть таких биективных отображений $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, что для любых различных матриц $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ выполнено:

$$A+B+C \text{ — вырождена} \iff T(A)+T(B)+T(C) \text{ — вырождена.}$$

Благодарности

Автор благодарит за ценные обсуждения Валентина Промыслова, а также своего научного руководителя — Александра Эмилевича Гутермана.

Источники и литература

1) D.F. Anderson, A. Badawi, The total graph of a commutative ring, J. Algebra 320 (2008) 2706–2719.
2) S. Akbari, F. Heydari, The regular graph of a noncommutative ring, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 89(1) (2014) 132-140.
3) J. Zhou, D. Wong, X. Ma, Automorphism group of the total graph over a matrix ring, Linear and Multilinear Algebra 65(3) (2017) 572-581.