Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О континуантах, допускающих одинаковое разложение

Научный руководитель – Ишмухаметов Шамиль Талгатович

Долгов Дмитрий Александрович

Аспирант

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, Россия

E-mail: DADolgoff@yandex.ru

Пусть числа a_i, b_i – входные числа i–го шага обобщенного алгоритма Соренсона (см. [1]), а $K = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ – некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел, больших двух. Определим величины $\beta_i = (\gcd(b_i, k_i))^{e_1}$, $\gamma_i = (\gcd(a_i, k_i))^{e_2}$ так, чтобы выполнялись условия: $\beta_i | b_i$, $\gamma_i | a_i$, $(\beta_i \gcd(b_i, k_i)) \not| b_i$, $(\gamma_i \gcd(a_i, k_i)) \not| a_i$. Если $\gcd(b_i, k_i) = 1$, тогда положим $e_1 = 0$ (аналогично для e_2).

Обобщение алгоритма Соренсона приводит к новому разложению числа a/b в цепную дробь с рациональными неполными частными с правым сдвигом (далее дробь) (см. [1]):

$$\frac{y_0\gamma_0}{x_0\beta_0} + \cfrac{k_0}{\left(\dfrac{y_1 x_0\beta_0\gamma_1}{\gamma_0 x_1\beta_1} + \cfrac{k_1}{\left(\ddots + \cfrac{k_{n-1}}{\dfrac{y_n \prod\limits_{\substack{0\leqslant i<n,\\ i\not\equiv n \mod 2}} x_i\beta_i \prod\limits_{\substack{0\leqslant t\leqslant n,\\ t\equiv n \mod 2}} \gamma_t}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n,\\ j\equiv n \mod 2}} x_j\beta_j \prod\limits_{\substack{0\leqslant m<n,\\ m\not\equiv n \mod 2}} \gamma_m}}\right)}\right)}. \tag{1}$$

Числители и знаменатели таких дробей можно представить с помощью континуантов, то есть многочленов специального вида от переменных x_i, y_i, k_i, γ_i, β_i при условии $0 \leqslant i \leqslant n$. Существуют различные дроби c_1/a, c_2/a, континуанты знаменателей которых при разложении полностью совпадают, а для числителей выполняются условия $c_1 = c_2 d$, $d > 1$. Для каждой дроби c_1/a число остальных дробей длины n, для которых выполняются условия леммы Туэ [2], а все члены последовательности K равны k, меньше или равно $\lceil\sqrt{k}\rceil$.

Также существуют такие последовательности чисел $\{(a_{i_1}, b_{i_1})\}$, $\{(a_{i_2}, b_{i_2})\}$, полученные при помощи обобщенного алгоритма Соренсона для начальных пар чисел (a, b_0), (a, b'_0), которые в итоге “сходятся” в одну точку через некоторое количество шагов алгоритма. Эти последовательности связаны с дробями c_1/a, c_2/a, для числителей которых не выполняются условия $c_1 = c_2 d$, $d > 1$. В докладе будут представлены оценки для числа обоих классов континуантов таких дробей, а также рассказано об их взаимосвязи с задачей средней длины цепной дроби [3].

Источники и литература

1) Долгов Д.А. О континуантах цепных дробей с рациональными неполными частными // Дискретная математика, (готовится к печати), 2022.
2) Thue A. Et par antydninger ti1 en taltheoretisk metode // Kra. Vidensk. Selsk. Forh. vol 7, 57–75, 1902.
3) Долгов Д.А. Об аналогах теоремы Хейльбронна // Математические заметки, (готовится к печати), 2022.