

## Графы ортогональности прямых сумм ассоциативных колец

Научный руководитель – Маркова Ольга Викторовна

*Новочадов Дмитрий Юрьевич**Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия  
*E-mail: dnovochadov@yandex.ru*

Кольца, о которых пойдёт речь в докладе, ассоциативные, наличие единицы не обязательно. *Графом ортогональности*  $O(R)$  кольца  $R$  называется простой неориентированный граф с петлями, вершины которого — все ненулевые двусторонние делители нуля в  $R$ , и  $x, y$  соединяются ребром, когда  $xy = yx = 0$ . Граф ортогональности является обобщением графа делителей нуля, введённого в [4] в связи с раскрашиваниями коммутативных колец. В [3] доказано, что граф делителей нуля коммутативного кольца с единицей связан и имеет диаметр не более 3. Граф ортогональности некоммутативного кольца был введён в [1], где было установлено, что граф  $O(M_2(\mathbb{F}))$  несвязен, а  $O(M_n(\mathbb{F}))$  при  $n \geq 3$  имеет диаметр 4. В [2] эти результаты были обобщены на простые артиновы кольца. В докладе будут представлены результаты совместной с О. В. Марковой работы по исследованию графов ортогональности колец с точки зрения поиска в них изолированных вершин, установления связности и диаметра. Особое внимание будет уделено графам нетривиальных прямых сумм. Такой граф состоит из изолированных вершин и одной связной компоненты диаметра, не большего 4. В общем случае компонент связности может быть несколько, а диаметр может быть сколь угодно велик. В качестве следствия получается характеристика графов колец одного из важнейших классических типов — полупростых:

**Теорема 1.** Пусть  $k \geq 2$  и  $R \cong R_1 \oplus \dots \oplus R_k = M_{n_1}(\mathbb{D}_1) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{D}_k)$ ,  $\mathbb{D}_i$  — тела. Тогда  $O(R)$  связан, и его диаметр равен **1**, если  $k = 2$  и  $R_1 \cong R_2 \cong \mathbb{Z}_2$ ; **2**, если  $k = 2$  и  $R_1, R_2$  — другая пара тел; **3**, если  $k > 2$  и  $R_1, \dots, R_k$  — тела; **4**, если существует  $n_i$ , большее единицы.

Также понятие графа ортогональности будет рассмотрено на других известных классах колец, включая первичные, полупервичные и конечные, а также проиллюстрировано примерами большее разнообразие графов ортогональности по сравнению с другими обобщениями графа делителей нуля. Докладчик благодарит своего научного руководителя доцента Ольгу Викторовну Маркову за постановку задачи и предоставление материалов для совместной работы.

## Источники и литература

- 1) Бахадлы Б. Р., Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы, определенные ортогональностью // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 428. С. 49–80.
- 2) Гутерман А. Э., Маркова О. В. Графы ортогональности матриц над телами // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 463. С. 81–93.
- 3) Anderson D. F., Livingston P. S. The zero-divisor graph of a commutative ring // J. Algebra. 1999. V. 217. P. 434–447.
- 4) Beck I. Coloring of commutative rings // J. Algebra. 1988. V. 116. P. 208–226.