Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

О корнях многочленов над алгебрами Кэли–Диксона

Жилина Светлана Александровна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$ с операцией сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Тогда алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная применением *процедуры Кэли–Диксона* с параметром $\gamma \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$, определяется как $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ с покомпонентным сложением, а также умножением и сопряжением

$$(a, b)(c, d) = (ac + \gamma \bar{d} b, da + b\bar{c}), \qquad \overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a, b, c, d \in \mathcal{A}.$$

Алгебрами Кэли–Диксона над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, называется совокупность алгебр $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, полученных последовательным применением процедуры Кэли–Диксона: $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n\{\gamma_n\}$. Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\gamma_k = -1$ для всех $k = 0, \ldots, n-1$, то $\mathcal{A}_n$ называется *алгеброй главной последовательности* и обозначается как $\mathcal{M}_n$.

Кольцо многочленов над $\mathcal{A}_n$ определяется как $\mathcal{A}_n[x] = \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x]$. Для многочлена $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^m \in \mathcal{A}_n[x]$ обозначим $\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} x^m$. Тогда $C_f(x) = \bar{f}(x) f(x) \in \mathbb{F}[x]$ — *многочлен-компаньон* для $f(x)$. При $n \leq 3$ корни $f(x)$ являются корнями $C_f(x)$ ([1]).

Целью данной работы является изучение связи между корнями $f(x)$, $f'(x)$ и $C_f(x)$ для произвольного $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$. Основные результаты представлены в теоремах 1 и 2.

Для каждого $a \in \mathcal{A}_n$ определены *след* $\operatorname{tr}(a) = a + \bar{a} \in \mathbb{F}$ и *норма* $n(a) = \bar{a}a \in \mathbb{F}$. *Характеристическим многочленом* для a называется $p_a(x) = x^2 - \operatorname{tr}(a)x + n(a) \in \mathbb{F}[x]$, причём $p_a(a) = 0$. Корень $a \notin \mathbb{F}$ называется *сферическим* для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$, если любое $b \in \mathcal{A}_n$, удовлетворяющее $p_a(b) = 0$, также будет корнем $f(x)$.

Теорема 1. *Элемент $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$ — сферический корень для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$, если и только если $f(x) = g(x)p_a(x)$ для некоторого $g(x) \in \mathcal{A}_n[x]$. Кроме того, в этом случае a является также корнем для $C_f(x)$.*

Классическая теорема Гаусса–Лукаса утверждает, что если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f \geq 1$, то корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $f(x)$. Обобщение этой теоремы на случай алгебры кватернионов $\mathbb{H} = \mathcal{M}_2$ было получено в работе [3] и использовало понятие улитки Гаусса–Лукаса, которая для произвольной $\mathcal{M}_n$ определяется следующим образом.

Для $a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}$ и $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ обозначим $\mathbb{C}_a = \mathbb{R}[a] \cong \mathbb{C}$ и $f_a = \operatorname{Pr}_{\mathbb{C}_a} f \in \mathbb{C}_a[x]$. Тогда *улиткой Гаусса–Лукаса* для $f(x)$ называется

$$\operatorname{sn}(f) = \bigcup_{\substack{a\in\mathcal{M}_n,\\ \operatorname{tr}(a)=0,\, n(a)=1}} K_{\mathbb{C}_a}(f_a), \quad \text{где} \quad K_{\mathbb{C}_a}(f_a) = \begin{cases} \operatorname{conv}\{b \in \mathbb{C}_a \mid f_a(b) = 0\}, & \deg f_a \geq 1; \\ \mathbb{C}_a, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 2. *Если $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$, то корни $f'(x)$ содержатся в $\operatorname{sn}(f)$.*

Доклад основан на работе [2].

Источники и литература

1) A. Chapman, *Polynomial equations over octonion algebras*, J. Algebra Appl., 19(6):10 (2020), 2050102.

2) A. Chapman, A. Guterman, S. Vishkautsan, S. Zhilina, *Roots and critical points of polynomials over Cayley–Dickson algebras*, Preprint.

3) R. Ghiloni, A. Perotti, *The quaternionic Gauss-Lucas theorem*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 197(6):1679–1686 (2018).