Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Гладиаторы и почти критические ветвящиеся процессы

Научный руководитель – Шкляев Александр Викторович

Харламов Виктор Владимирович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: xarik1999@gmail.com

Ветвящиеся процессы имеют приложения в различных задачах. Структура ветвящихся процессов возникает в задачах, которые могут на первый взгляд даже не иметь никаких аналогий с ветвящимися процессами.

Рассмотрим модель сражения гладиаторов. Пусть наш гладиатор имеет силу 1, а его противник - случайную положительную силу X_0, обладающую распределением F. Гладиаторы сражаются, и вероятность побед нашего гладиатора пропорциональна его силе и равна $1/(1+X_0)$. В случае победы гладиатора тот "повышает"свой уровень, и его сила становится равной $e^{b_{1,n}}$, а в случае поражения турнир заканчивается. В следующем бою наш гладиатор сражается с противником, сила X_1 которого не зависит от силы другого противника в предыдущем бою и имеет распределение F. В этом случае вероятность победы нашего гладиатора равна $e^{b_{1,n}}/(e^{b_{1,n}}+X_1)$. Победа "повышает"уровень нашего гладиатора, а поражение "понижает".

Итак, пусть гладиатор находится на уровне $k \geq 0$. На этом уровне его сила равна $e^{a_{k,n}}$, где $a_{k,n} := \sum_{j=0}^{k} b_{j,n}, b_{0,n} := 0$. Против нашего гладиатора сражается другой гладиатор со случайной силой X, не зависящей от сил предыдущих противников, обладающей распределением F. Вероятность победы нашего гладиатора равна

$$\frac{e^{a_{k,n}}}{e^{a_{k,n}} + X}.$$

Если наш гладиатор выигрывает, то он переходит на уровень $k+1$. Если наш гладиатор проигрывает, то в случае положительного k он переходит на уровень $k-1$, а в случае $k = 0$ сражение турнир заканчивается.

Оказывается, что эта модель содержит в себе ветвящийся процесс с геометрическим распределением $Z_{k,n}$. Вероятность достижения нашим гладиатора уровня k равна вероятности того, что $Z_{k,n} > 0$, то есть вероятности невырождения ветвящегося процесса в k-м поколении.

Поставим задачу нахождения асимптотики вероятности того, что наш гладиатор доберётся до n-го уровня, то есть $Z_{n,n} > 0$ при $n \to \infty$. В зависимости от параметров распределения F и асимптотического поведения $a_{k,n}$ мы будем получать различные результаты для асимптотики $\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0)$.

Новизна работы состоит в рассмотрении случая критического (при $a_{k,n} \equiv 0$) ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением, где для некоторого $\delta \in (0, 1/2)$

$$\max_{k \leq n} k^{\delta - 1/2} |a_{k,n}| \to 0, \ n \to \infty.$$

Оказывается, что в этом случае асимптотика вероятности достижения гладиатором уровня n не зависит от изменения его силы, то есть

$$\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \frac{c}{\sqrt{n}},\ n \to \infty,$$

где c – не зависит от значений $a_{k,n}$, но зависит от распределения F. Значение константы c определено в теореме 5.1 [1].

Источники и литература

1) Kersting G., Vatutin V. Discrete time branching processes in random environment. – John Wiley & Sons, 2017.