О предельной концентрации значений хроматических чисел случайных гиперграфов

Научный руководитель – Шабанов Дмитрий Алекссандрович

Денисов Илья Олегович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: iodenisov@yandex.ru

В работе изучается асимптотическое поведение j-хроматического числа случайного k-однородного гиперграфа $H(n,k,p)$ в биномиальной модели, где $p=\frac{cn}{\binom{n}{k}}, c>0$. Получено, что с вероятностью, стремящейся к 1 при росте n, j-хроматическое число концентрируется в одном значении (при определенных условиях на параметр c).

Введем необходимые определения. *Гиперграфом* H называется пара множеств $H=(V,E)$, где $V=V(H)$ - это конечное множество, элементы которого называются *вершинами* гиперграфа, а $E=E(H)$ - произвольная совокупность подмножеств V, которые принято называть *ребрами* гиперграфа H. Если каждое ребро $A\in E$ состоит ровно из k вершин (т.е. A - это k-подмножество V), то говорят, что гиперграф H является *k-однородным.* Множество вершин $W\subset V$ в гиперграфе $H=(V,E)$ называется *j-независимым*, если для любого ребра $A\in E|A\cap W|\leq j$. Раскраска вершин гиперграфа $H=(V,E)$ в r цветов - это отображение $f:V\to\{1,\dots,r\}$. Множества $V_i=f^{-1}(i)$,$i=1,\dots,r$ называются **цветовыми классами** раскраски f. Если каждый цветовой класс является j-независимым множеством, то раскраска f называется j-правильным раскрашиванием гиперграфа H. Тем самым, каждое ребро в j-правильной раскраске имеет не более j вершин каждого из цветов. Минимальное число цветов r, необходимое для j-правильного раскрашивания вершин гиперграфа, называется **j-хроматическим числом** гиперграфа H и обозначается через $\chi_j(H)$.

Основным новым результатом являются следующие две теоремы об асимптотическом поведении j-хроматических чисел $\chi_j(H(n,k,p))$. Они дают очень точную оценку пороговой вероятности для свойства наличия j-правильной раскраски в r цветов у случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ при $j<k-1$ и $r>>k$.

Теорема 1. Пусть $H(n,k,p)$ — случайный k-однородный гиперграф на n вершинах, где $p=cn/\binom{n}{k}$,$c>0$. Для любого $k\geq 17$ существуют такие положительные числа $C_u=C_u(r,k)=\left(\frac{\binom{k}{j+1}}{6}+O\left(\frac{1}{r}\right)\right)$ и $r_0=r_0(k)$, что при $r>r_0$ и $k/2<j<k$ выполнено следующее: если

$$c>\frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s}-\frac{\ln r}{2}+C_u(r^{-j}\ln r), \tag{1}$$

то

$$\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,m))>r)\to 1$$

при $n\to\infty$.

Теорема 2. Пусть $H(n,k,p)$ — случайный k-однородный гиперграф на n вершинах, где $p=cn/\binom{n}{k}$,$c>0$. Для любого $k>144$ существуют такие положительные числа $C_r=C_r(k,r)=\frac{1}{\binom{k}{j+1}}-O\left(\frac{1}{r}\right)$ и $r_0=r_0(k)$, что при $r>r_0$ и $\frac{71}{72}k<j<k-1$, выполнено следующее: если

$$c<\frac{r^{k-1}\ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1}\binom{k}{s}(r-1)^s}-\frac{\ln r}{2}-C_r, \tag{2}$$

то

$$\mathsf{P}(\chi_j(H(n,k,m))\leq r)\to 1$$

при $n\to\infty$.