Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Ветвящееся случайное блуждание с одним сильным центром генерации частиц и бесконечным числом поглощающих источников

Филичкина Елена Михайловна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: elena.filichkina1999@yandex.ru

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) с непрерывным временем по многомерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Поведение ВСБ с одним центром генерации частиц в начале координат и отсутствием поглощающих источников в предположениии конечной дисперсии скачков исследовано, напр., в [1], а с бесконечной дисперсией — в [3], [4]. В отличие от моделей ВСБ, рассмотренных ранее, предполагается, что во всех точках решетки находятся источники, называемые *поглощающими*, в которых частицы могут только гибнуть, за исключением начала координат, где возможно также размножение частиц. Как и в предыдущих исследованиях ВСБ целью является асимптотический анализ локальной численности частиц и численности частиц на всей решетке, а также асимптотический анализ их целочисленных моментов. Установлено, что первые моменты локальной численности частиц и общего числа частиц удовлетворяют задаче Коши: $\dfrac{dm_1}{dt} = \mathcal{E}m_1$ с начальными условиями $m_1(0,\cdot,y) = \delta_y(\cdot)$ или $m_1(0,\cdot) \equiv 1$ соответственно, где эволюционный оператор средних численностей частиц имеет вид $\mathcal{E} = \mathcal{A} + \beta\Delta_0 - b_0\mathcal{I}$, здесь $\mathcal{A} : l^p(\mathbb{Z}^d) \to l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — оператор блуждания, действующий по формуле $A\psi(x) = \sum\limits_{x'} a(x,x')\psi(x)$, параметр β определяется по формуле $\beta := \sum\limits_{n>1}(n-1)b_n$, где b_n — интенсивность появления у частицы $n > 1$ потомков, включая саму частицу, $\Delta_x = \delta_x\delta_x^T, \delta_x = \delta_x(\cdot)$ — вектор-столбец на решетке, принимающий единичное значение в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ и значение ноль в остальных точках решетки, $b_0 > 0$ — интенсивность гибели частиц в каждой точке решетки, а $\mathcal{I}$ — единичный оператор. Получена классификация асимптотического поведения первых моментов локальной численности частиц $m_1(t,x,y)$ и общего числа частиц $m_1(t,x)$ для произвольных d-мерных решеток при $t \to \infty$. Оказалось, что, используя некоторую замену переменных, уравнения для первых моментов можно свести к уравнениям рассмотренным в [1]. Пусть параметр β_c определяется по формуле $\beta_c := 1/G_0(0,0)$, где $G_\lambda(x,y)$ — функция Грина случайного блуждания, а λ_0 является решением уравнения $\beta G_\lambda(0,0) = 1$. Получено, что поведение моментов зависит от размерности решетки, соотношения между параметрами модели β и β_c и соотношения между параметрами λ_0 и b_0. Остановимся на случае, когда $\beta > \beta_c$ и $\lambda_0 > b_0$. Также получены уравнения для старших моментов локальной численности $m_n(t,x,y)$ и общего числа частиц $m_n(t,x)$, $n \geq 2$, исследовано их асимптотическое поведение и получена предельная теорема в рассматриваемом случае. Будем обозачать локальную численность частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ как $\mu(t,y)$, общую численность (популяцию частиц) как $\mu(t)$, $\beta^{(r)} := f^{(r)}(1)$, где $f(u)$ — инфинитезимальная производящая функция процесса.

Теорема 1. *Пусть $\beta > \beta_c$ и $\lambda_0 > b_0$. Если $\beta^{(r)} = O(r!r^{r-1})$ для всех $r \in \mathbb{N}$, то в смысле сходимости по распределению справедливы соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t,y)e^{-(\lambda_0-b_0)t} = \xi\psi(y), \quad \lim_{t\to\infty} \mu(t)e^{-(\lambda_0-b_0)t} = \xi,$$

где $\psi(y)$ — некоторая неотрицательная функция, а ξ — невырожденная случайная величина.

Источники и литература

1) *Е. Б. Яровая*, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007
2) *И. И. Христолюбов, Е. Б. Яровая*, "Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности", Теория вероятн. и ее примен., 64:3 (2019), 456–480; Theory Probab. Appl., 64:3 (2019), 365–384, https://doi.org/10.4213/tvp5245.
3) *А. И. Рытова, Е. Б. Яровая*, "Моменты численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании с тяжелыми хвостами", Успехи матем. наук.– Т. 74, № 6. – С. 165–166, 2019.
4) *A. Rytova, E. Yarovaya*, "Heavy-tailed branching random walks on multidimensional lattices. A moment approach", Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A Mathematics – P. 1–22, 2020.