Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Большая система осцилляторов с ультралокальным воздействием случайного стационарного внешнего поля

Меликян Маргарита Врежовна
Сотрудник
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: magaarm@list.ru

Рассматривается конечная система точечных частиц единичных масс в случайном поле на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с координатами $\{x_k\}_{k=1}^N$ и скоростями $\{v_k\}_{k=1}^N$. Обозначим $q_k(t) = x_k - kd, \quad p_k(t) = \dot{q}_k(t) = v_k(t)$, где параметр $d > 0$. Полная энергия системы (гамильтониан) имеет вид:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} a(k-j) q_k q_j - q_n f(t),$$

где функция $a(k)$ удовлетворяет двум условиям:

1. симметрия: $a(k) = a(-k)$;

2. матрица V положительно определена, где $V_{k,j} = a(k-j) = a(j-k)$. Обозначим собственные значения матрицы V через $a_k = \nu_k^2, k = 1, ..., N$, причем все ν_k будем считать положительными. Соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов обозначим через $\{u_k, k = 1, ..., N\}$. Заметим, что положением равновесия системы (состояние, где достигается минимум энергии) будет $x_k = kd, \quad v_k = 0, \quad k = 1, ..., N$. Это означает, что если начальные условия находятся в положении равновесия, то частицы не будут двигаться, т.е. будем иметь $x_k(t) = kd,\ v_k(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$. Пусть $f(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером n, – стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с непрерывной ковариационной функцией $B(s)$ и спектральной мерой $\mu(dx)$.

Теорема. Пусть мера μ такова, что ковариационную функцию рассматриваемого случайного процесса можно представить в виде $B(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} b(x) dx$. Тогда

1. если носитель $b(x)$ не пересекается с множеством $\{\nu_k, k = 1, ..., N\}$, то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

2. если для всех j, таких что ν_j лежит в $supp\, b(x)$, $(u_j, e_n)^2 = 0$, то вновь имеет место ограниченность по времени средней энергии;

3. если есть точка спектра ν_j, лежащая в $supp\, b(x)$, такая что $(u_j, e_n)^2 \neq 0$, то

3.1. если $\nu_j = 0$ и выполнено

$$b(0) = b'(0) = 0, \tag{1}$$

то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

3.2. иначе (т.е. для тех индексов $j \in \{1, ..., N\}$, для которых либо $\nu_j \neq 0$, либо $\nu_j = 0$, но не выполнено (1)) средняя энергия будет расти по времени, причем существует положительная постоянная C, такая что $E(H(t)) \sim Ct^2$.

Источники и литература

1) Лыков А.А., Малышев В.А., Меликян М.В. Резонанс в многокомпонентных линейных системах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 3. С. 74-79.