Устойчивость решения проблемы Ферма-Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Галстян Арсен Хачатурович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ares.1995@mail.ru

Аннотация. Проблема Ферма–Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ пространства Y минимальна [1]. Множество A в таком случае называют *границей*, а все A_i — *граничными множествами*. Мы рассматриваем эту проблему в случае, когда Y — это пространство непустых компактных подмножеств конечномерного нормированного пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа, то есть Y является гиперпространством над X. В данной работе изучается вопрос устойчивости решения проблемы Ферма-Штейнера при переходе от границы из конечных компактов к границе, состоящей из их выпуклых оболочек. Под устойчивостью имеется в виду, что при переходе к выпуклым оболочкам граничных компактов минимум суммы расстояний не изменится.

Ключевые слова: проблема Штейнера, проблема Ферма–Штейнера, экстремальные сети, конечномерные нормированное пространство, гиперпространство, расстояние Хаусдорфа.

Подмножества, которые реализуют минимум суммы расстояний до граничных компактов, называются *компактами Штейнера*. Мы обозначаем множество всех компактов Штейнера через $\Sigma(A)$. Оно разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, где $d = (d_1, \ldots, d_n)$, а d_i — это расстояние Хаусдорфа от компакта $K \in \Sigma_d(A)$ до A_i, то есть $d_i = d_H(A_i, K)$. Множество всех векторов решений $d = (d_1, \ldots, d_n)$ для заданной границы A обозначается через $\Omega(A)$. Известно [2], что каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе единственный компакт K_d, который максимален по включению, а также некоторое количество минимальных по включению компактов. Через $B_r(y) \subset X$ мы обозначаем замкнутый шар с центром в точке y радиуса r. В статье [2] было доказано, что $K_d = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$, где $d \in \Omega(A)$. В работе [3] показано, что в случае границы из конечных компактов существует такой граничный компакт A_i и такая точка a_j^i в нём, что $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ является конечным множеством, оно обозначается через $\mathrm{HP}(a_j^i)$. Если $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ бесконечно, то полагают для удобства, что $\mathrm{HP}(a_j^i) = \emptyset$. Множество $\bigcup\limits_{i,j} \mathrm{HP}(a_j^i)$ обозначается $\mathrm{HP}(A)$.

В настоящей работе мы доказываем, что в случае устойчивости решения проблемы Ферма–Штейнера сохраняется не только значение минимума суммы расстояний до граничных компактов, но остаётся неизменным сам вектор расстояний $(d_1, \ldots, d_n)$. Также мы приводим достаточное условие неустойчивости решения проблемы Ферма–Штейнера.

Введём отображение $\mathrm{Conv} : Y \to Y$, которое каждому элементу гиперпространства Y ставит в соответствие его выпуклую оболочку. Обозначим также $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$ через K_d^{Conv}, а внутренность K_d^{Conv} через U_d^{Conv}.

Утверждение 1. *Для всех i выполняется* $d_H\big(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}\big) \le d_i$.

Утверждение 1 говорит о том, что минимум суммы расстояний при переходе к выпуклым оболочкам может лишь уменьшиться, и если он сохранился, то исходный вектор $(d_1, \ldots, d_n)$ будет вектором, реализующим решение проблемы Ферма–Штейнера для границы из выпуклых оболочек изначальных конечных граничных компактов. Более того, в случае устойчивости K_d^{Conv} будет максимальным компактом Штейнера в классе $\Sigma_d(A)$ для новой границы из выпуклых компактов.

Теорема 1. [Достаточное условие неустойчивости] *Пусть граница A состоит из конечных компактов и норма пространства X, над которым было построено гиперпространство Y, строго выпукла. Тогда граница A является неустойчивой, если существует номер s такой, что*

$$\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_{d_s}(a_j^s) \cap \mathrm{HP}(A) \subset U_d^{\mathrm{Conv}},$$

где m_s — количество точек в компакте A_s.

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, профессору А. А. Тужилину и профессору А. О. Иванову, за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00355 в МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Источники и литература

1) Ivanov A., Tuzhilin A. *Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems* // World Scientific, 2001. – 364 p.
2) Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A. *Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance* // Journal of Geom. **108**, 2017. – P. 575–590.
3) A. Kh. Galstyan, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric*, Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56