Секция «Геометрия и топология»

**Задача топологического анализа системы Жуковского в псевдо-евклидовом пространстве**

**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич**

***Агуреева Екатерина Сергеевна***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
*E-mail: katekat2003@mail.ru*

Изучение топологии слоений Лиувилля интегрируемых систем, имеющих некомпактные слои или неполные потоки, предполагает расширение на них теории топологической классификации, построенной в работах А.Т. Фоменко и его школы (подробнее смотри [1]). Данный класс систем существенно более разнообразен и труден для анализа. Поэтому разбор конкретных примеров таких систем представляет большой интерес.

Указанная в работе А.В. Борисова и И.С. Мамаева [2] серия систем, как ожидается, относится к такому классу. В их число входят аналоги известных интегрируемых волчков: Эйлера, Лагранжа и Ковалевской (последняя система действительно имеет некритические бифуркации компактных и некомпактных слоев, см. [3]).

Рассмотрим скобку Пуассона на $\mathbb{R}^6(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma S_3 & -S_2 & 0 & \sigma R_3 & -R_2 \\ -\sigma S_3 & 0 & S_1 & -\sigma R_3 & 0 & R_1 \\ S_2 & -S_1 & 0 & R_2 & -R_1 & 0 \\ 0 & \sigma R_3 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma R_3 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Евклидовому и псевдо-евклидовому случаю соответствуют значения $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Функции Казимира $f_1, f_2$ такой скобки Пуассона имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= R_1^2 + R_2^2 + \sigma R_3^2 = a, \\ f_2 &= S_1R_1 + S_2R_2 + \sigma S_3R_3 = b, \end{aligned}$$

В псевдо-евклидовом случае возникает три принципиально разных и нетривиальных случая в зависимости от знака $a$, равного $-1, 0, 1$. При фиксированных $(S_1, S_2, S_3)$ совместный уровень $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(R_1, R_2, R_3)$ есть пересечение обобщенного гиперболоида и плоскости. Как оказалось, тип такого пересечения полностью задается значениями $a, b$ и $k = S_1^2 + S_2^2 + \sigma S_3^2$.

Нами изучается аналог системы Жуковского (т.е. волчка Эйлера с гиростатом) при отрицательном $\sigma$. Гамильтониан $H$ и первый интеграл $K$ (совпадающий с интегралом волчка Эйлера) отличаются от классических появлением множителя $\sigma$ в третьих слагаемых:

$$H = \frac{(S_1+\lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2+\lambda_2)^2}{2A_2} + \sigma \cdot \frac{(S_3+\lambda_3)^2}{2A_3} = h,$$
$$K = S_1^2 + S_2^2 + \sigma \cdot S_3^2 = k.$$

Такое семейство систем обладает двумя замечательными свойствами. Во-первых, нахождение топологии совместного уровня четырех первых интегралов в шестимерном пространстве $\mathbb{R}^6(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3)$ сводится к двум задачам о совместных уровнях пары поверхностей $f_1 = a, f_2 = b$ и $H = h, K = k$ в двух трехмерных пространствах $\mathbb{R}^3(R_1, R_2, R_3)$

и $\mathbb{R}^3(S_1, S_2, S_3)$ соответственно. Во-вторых, все четыре функции являются квадриками $(f_1, H, K)$ или плоскостью $(f_2)$ в соответствующем $\mathbb{R}^3$. Это не только существенно упрощает вычисления, но и позволяет использовать известную компактификацию $\mathbb{R}^3$ — проективное пространство $\mathbb{R}P^3$. Это соображение позволяет эффективно обнаруживать некритические бифуркации слоения Лиувилля (т.е. не содержащие точек падения ранга отображения момента $H, K$) или доказывать их отсутствие.

Множество точек падения ранга отображения момента данной системы допускает следующее описание.

**Теорема.** *Множества критических точек отображения момента псевдо-евклидовой и евклидовой систем Жуковского совпадают. При попарно различных $A_1, A_2, A_3$ и $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ эти точки лежат на следующей бифуркационной кривой, при соответствующем $\sigma = \pm 1$:*

$$h(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1+2A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1+2A_2t)^2} + \sigma\cdot\frac{A_3\lambda_3^2}{(1+2A_3t)^2}\right),$$
$$k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1+2A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1+2A_2t)^2} + \sigma\cdot\frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1+2A_3t)^2}.$$

В докладе будут приведены примеры расположения данной кривой при разных значениях параметров системы: моментов инерции и вектора гиростатического момента $\vec{\lambda}$, а также значений $a, b$ функций Казимира. Также будут показаны примеры некомпактных некритических бифуркаций слоений Лиувилля, связанных с изменением типа пересечения обобщенного гиперболоида $f_1 = a$ и плоскости $f_2 = b$ в зависимости от значения интеграла $K = k$.

## Источники и литература


1) А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация”, Т. 1, 2, Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999
2) A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces”, Russ. J. Math. Phys., 23:4 (2016), 431–454.
3) В.А. Кибкало, “Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли”, Вестн. Моск. унив. Сер. 1. Матем. Механ., 2020, N. 6, 56–59