

Квадратично интегрируемые геодезические потоки на проективной плоскости и их реализация бильярдами с проскальзыванием**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич****Завьялов Владимир Николаевич***Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: vnzavyalov@mail.ru

¹ Согласно теореме В.В.Козлова, интегрируемые геодезические потоки, являющиеся полиномом не выше двух, на двумерных компактных римановых многообразиях без границы (многообразии и метрика \mathbb{R} -аналитические) могут существовать лишь на торе, сфере, бутылке Клейна и проективной плоскости. Топология их слоений Лиувилля в случае, если дополнительный интеграл имеет степень не выше двух, была изучена в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга в работах В.С. Матвеева, Е.Н. Селивановой, В.В. Калашникова (мл.), Нгуен Тьен Зунга, Л.С.Поляковой, обзор см. [2].

Недавние результаты В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко показывают, что рассмотрение класса интегрируемых бильярдов на столах-комплексах (бильярдные книжки и топологические бильярды) позволяет промоделировать слоения Лиувилля многих интегрируемых систем динамики. В частности, им удалось реализовать бильярдами слоения Лиувилля произвольных геодезических потоков на двумерных **ориентируемых** поверхностях, имеющих линейный или квадратичный интеграл. [3]

В докладе будет представлено развитие этой работы на случай **неориентируемых** многообразий (будут рассмотрены потоки на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с интегралом, квадратичным по импульсам). Для этого понадобилось использовать новый класс бильярдов, введенный А.Т. Фоменко — бильярды с проскальзыванием [1]. Рассмотрим F — изометрию плоского эллипса, переводящую точку x в диаметрально противоположную ей точку y . Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно внутри эллипса и попадает на границу. Продолжим ее из точки $y = F(x)$ по лучу, выходящему из нее под углом α . При этом направление траектории “по” или “против” часовой стрелки сохранится. Иными словами, ее продолжение выходит из новой точки под тем же углом, “проскальзывая” вдоль границы. На основании этого такой класс систем был назван “бильярдами с проскальзыванием”.

Добавление проскальзывания к системам топологических бильярдов позволило реализовать произвольные линейно интегрируемые геодезические потоки. Этот результат получен докладчиком совместно с В.В. Ведюшкиной.

Теорема. *Любой линейный по импульсам геодезический поток на двумерном неориентируемом многообразии (бутылке Клейна или проективной плоскости) лиувиллево эквивалентен подходящему бильярду с проскальзыванием. При этом линейные интегралы геодезических потоков сводятся к одному каноническому линейному интегралу на бильярде.*

Теорема. *Любой квадратичный по импульсам геодезический поток на проективной плоскости лиувиллево эквивалентен подходящему бильярду с проскальзыванием. При этом квадратичный интеграл геодезического потока сводится к одному каноническому квадратичному интегралу на бильярде.*

¹Работа выполнена за счёт гранта РНФ, проект № 20-71-00155

Источники и литература

- 1) *A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav'yalov* Liouville foliations of topological billiards with slipping. *Russ. J. Math. Phys.* Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
- 2) *Болсинов А.В., Фоменко А.Т* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
- 3) *Vedyushkina (Fokicheva) V.V., Fomenko A.T.* Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards. *Izv. Math.* 83(6), 1137–1173 (2019).

Иллюстрации

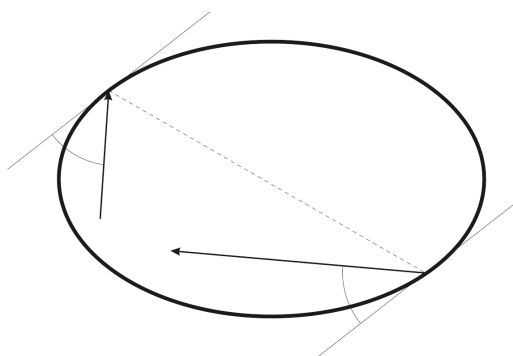


Рис. 1. Звенья траектории бильярда в эллипсе с проскальзыванием на угол π до и после удара о границу.