Секция «Геометрия и топология»

Мера и размерность пересечений фрактальных кубов

Научный руководитель – Тетенов Андрей Викторович

Дроздов Дмитрий Алексеевич
Аспирант
Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет, Новосибирск, Россия
E-mail: d.drozdov1@g.nsu.ru

Определение. *Пусть* $D = \{d_1, \ldots, d_r\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}^k$*, где* $n \geq 2$*, а* $1 < \#D < n^k$*. Фрактальным* k*-кубом порядка* n *с множеством единиц* D *называют компактное множество* $K \subset R^k$*, удовлетворяющее*

$$K = \frac{K + D}{n}.$$

Пусть $P = [0,1]^k$, тогда любой фрактальный k-куб содержится в P.

Определим грани куба P. Пусть $\alpha \in A = \{-1, 0, 1\}^k$, тогда $P_\alpha = P \cap (P + \alpha)$ есть α-грань куба P. Размерность такой α-грани есть $\dim(P_\alpha) = k - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|$.

Пусть $\alpha, \beta \in A$, будем говорить, что β подчинено α (обозначим через $\beta \sqsupset \alpha$), если для любого $i = 1, \ldots, k$ неравенство $\alpha_i \neq 0$ влечёт $\alpha_i = \beta_i$.

Для фрактального k-куба K мы определим его грани K_α как $K_\alpha = K \cap P_\alpha$. Грани фрактального куба есть фрактальные кубы.

Пусть $K_1 = \frac{D_1 + K_1}{n}$ и $K_2 = \frac{D_2 + K_2}{n}$ – фрактальные k кубы. Мы доказываем следующую теорему о пересечении фрактальных кубов:

Теорема. *Семейство* $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ *пересечений* $F_\alpha = K_1 \cap (K_2 + \alpha)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta \sqsupseteq \alpha} T_{\alpha\beta}(F_\beta), \qquad \alpha \in A,$$

где для любого $\beta \sqsupseteq \alpha$*,* $T_{\alpha\beta}(F_\beta) = \frac{1}{n}(F_\beta + G_{\alpha\beta})$ *и* $G_{\alpha\beta} = D_1 \cap (D_2 + n\alpha - \beta)$*.*

Предложение. $F_\alpha = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\beta \sqsupseteq \alpha$ *и любой конечной последовательности* $\alpha = \alpha_0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_p = \beta$ *произведение* $\#G_{\alpha_0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \#G_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \cdot \#G_\beta$ *равно нулю.*

Мы доказали теоремы о размерности множества F_0 и о признаке бесконечной меры этого множества:

Теорема. *Если* $F_0 \neq \varnothing$*, то размерность* $\dim(F_0) = \log_n m$*, где* $m = \max\{\#G_\alpha,\ \alpha \in A :$ *для любой последовательности* $0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_{p-1} \sqsubset \alpha$ *произведение* $\#G_{0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\alpha} \cdot \#G_\alpha \neq 0\}$*.*

Теорема. *Пусть* $\#G_0 = \#G_\beta$ *и* $\log_n \#G_0 = s$*. Если существует последовательность* $0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \ldots \sqsubset \alpha_{p-1} \sqsubset \beta$ *такая, что* $\#G_{0\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\beta} \geq 1$*, то* $H^s(F_0) = \infty$*.*