Специальные случаи частично проективных кватернионных многообразий Штифеля

Научный руководитель – Попеленский Фёдор Юрьевич

Горденин Леонид Владимирович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: db0zmail@gmail.com

Кватернионное многообразие Штифеля $H_{n,k}$ — это многообразие, состоящее из ортонормированных k-реперов в $\mathbb{H}^n$. Кольца когомологий пространств $H_{n,k}$ вычислены в [2]:

$$H^*(H_{n,k};\mathbb{Z}) = \Lambda(z_{n-k+1},\dots,z_n),$$

где $\deg z_j = 4j-1$.

Многообразие Штифеля допускает действие скаляров, по модулю равных единице, состоящее в умножении всех векторов репера на скаляр; соответствующее факторпространство называется *проективным кватернионным многообразием Штифеля* $PH_{n,k}$. В [2] показано, что

$$H^*(PH_{n,k},\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[x]/(x^N)\otimes\Lambda(y_{n-k+1},\dots,y_{N-1},y_{N+1},\dots,y_n),$$

где $N = \min\{j|n-k+1\leqslant j\leqslant n, \binom{n}{j}\not\equiv 0 \mod p\}$, $\deg y_j = 4j-1$, $\deg x = 4$.

Пусть G – конечная группа, допускающая свободное действие на S^3; вот полный список таких групп (например, см. [3]): конечные циклические группы $\mathbb{Z}_m$, обобщённые группы кватернионов Q_{4m}, двойная тетраэдральная группа P_{24}, двойная октаэдральная группа P_{48}, двойная икосаэдральная группа P_{120}, две серии подгрупп $SO(4)$: $P'_{8\cdot 3^s}$ и $B_{2^s(2m+1)}$, а также все прямые произведения любой из перечисленных групп с циклической группой взаимно простого порядка. Тогда G свободно и дискретно действует левыми сдвигами на слоях расслоения $H_{n,k}\to PH_{n,k}$. Факторпространство $H^G_{n,k} = H_{n,k}/G$ называем *частично проективным кватернионным многообразием Штифеля*.

В [1] вычислены их кольца когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$ в зависимости от G и p для всех случаев G, кроме случая прямого произведения с циклической группой взаимно простого порядка.

В настоящем докладе рассматриваются все случаи действия группы $G' = G\times\mathbb{Z}_m$, где m взаимно прост с $|G|$. Например, для группы $G = P_{48}$ верно следующее утверждение:

Теорема. *Имеют место изоморфизмы колец:*

(a) *Если p — простое число, $p\nmid m$, $p\nmid |G| = 48$,*

$$H^*(H^{G'}_{n,k};\mathbb{Z}_p)\cong H^*(H_{n,k};\mathbb{Z}_p),$$

(b) *Если $p\mid m$,*

$$H^*(H^{G'}_{n,k};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\beta_1,\gamma_2]\otimes H^*(PH_{n,k};\mathbb{Z}_p)/(\gamma_2^2 = x),$$

где $\deg\beta_1 = 1, \deg\gamma_2 = 2$, *$x$ — образующая $H^4(PH_{n,k};\mathbb{Z}_p)$.*

(c) *Если $p = 3$,*

$$H^*(H_{n,k}^{G'};\mathbb{Z}_3)=\Lambda(\delta_3)\otimes H^*(PH_{n,k};\mathbb{Z}_3),$$

где $\deg\delta_3=3$.

(d) *Если* $p=2$,

$$H^*(H_{n,k}^{G'};\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_p[\beta_1]/(\beta_1^4=0)\otimes H^*(PH_{n,k};\mathbb{Z}_2).$$

Случаи остальных групп G представлены в докладе и здесь не приводятся ввиду недостатка места.

Источники и литература

1) *Жубанов Г.Е., Попеленский Ф.Ю.* О кольцах когомологий частично проективных кватернионных многообразий Штифеля // Матем. сборник, 2022, том 213, номер 3, стр. 21–40.
2) *Borel A.* Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts // Ann. Math. 57 (1953), 115–207.
3) *J. Milnor* Groups which act on S^n without fixed points // Amer. J. Math. 79 (1957), 623–630.