Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Оптимальный план исполнения заявки для случая детерминированной структуры ликвидности

Токаева Александра Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: galynka@ymail.com

Рассмотрим модель, в которой агент хочет купить x единиц актива (например, акций), причем x настолько велико, что оказывает влияние на цену актива, и цель агента — придумать оптимальную стратегию для минимизации издержек. Пусть $X = (X_t)_{t\geq 0}$ — непрерывный справа возрастающий процесс с $X_{0-} = 0$. Он интерпретируется как число акций, находящихся у агента в момент времени t. Назовем класс таких процессов *допустимыми.* Рассматриваются только возрастающие (в отличие от статьи [3]) процессы X_t, что соответствует монотонным стратегиям исполнения заявки. Время в модели идет с $t = 0-$, а не с $t = 0$, чтобы в нулевой момент разрешать процессу X_t делать скачок. Отклонение цены вследствие исполнения заявок описывается процессом η_t, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению:

$$\begin{cases} d\eta_t^X = \frac{dX_t}{\delta_t} - r_t\eta_t^X dt \\ \eta_{0-}^X = \eta_0 \geq 0 \end{cases}$$

Параметры r_t и δ_t интерпретируются как упругость книги заявок и глубина рынка соответственно. В статье [2] оба эти параметра предполагались постоянными, а в данном исследовании обоим параметрам разрешено быть зависящими от времени (но детерминированными) функциями. Минимизируемый функционал задается формулой:

$$C\left(X\right) = \int_{[0,+\infty)} \left(\eta_{t-}^X + \frac{\Delta_t X}{2\delta_t}\right) dX_t$$

Целью работы является нахождение допустимого процесса X_t, минимизирующего функционал издержек на множестве $X \in \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — множество непрерывных справа возрастающих процессов с $X_{0-} = 0, X_\infty = x, C(X) \leq \infty$. Здесь $\Delta_t X = X_{t+} - X_{t-}; X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$.
Теорема 1. Пусть $\rho_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$, $r_t : [0,\infty) \to (0,\infty)$ — строго положительна и локально интегрируема по Лебегу, $\delta_t : [0,\infty) \to (0,\infty)$ — неотрицательна, не тождественно нулевая, ограниченная, полунепрерывная сверху, и $\limsup_{t\to\infty} \frac{\delta_t}{\rho_t} = 0.\lambda_t := \frac{\delta_t}{\rho_t}$, $\widetilde{\lambda}_t = sup_{u\geq t}\lambda_u$ $L_t^* = \inf_{u<t} \frac{\widetilde{\lambda_u} - \widetilde{\lambda_t}}{\frac{\widetilde{\lambda_u}}{\rho_u} - \frac{\widetilde{\lambda_t}}{\rho_t}}$. Тогда оптимальная стратегия имеет вид:

$$X_t^* = \lambda_0(y^* L_0^* - \eta_0)^+ + \int_{(0,t]} \lambda_s dsup_{0\leq v\leq s}\left[(y^* L_v^*) \vee \eta_0\right]$$

Константа $y^* > 0$ выбирается так, чтобы $x_\infty^* = x$. Это можно сделать, если правая часть выражения при $y^* = 1$ ограничена при $t \to \infty$, иначе решения нет. Отметим, что если взять решение теоремы 1 для константных r_t и δ_t, то получится в точности результат, полученный Обижаевой и Вангом в [2].

Источники и литература

1) P. Bank and A. Fruth. Optimal Order Scheduling for Deterministic Liquidity Patterns// Society for Industrial and Applied Mathematics. 2014. V.∼5. P.∼137–152.
2) A. A. Obizhaeva and J. Wang. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics.// J. Finan.Markets. 2013. V.∼16. P.∼1–32.
3) A. Alfonsi and J. Acevedo. Optimal execution and price manipulations in time-varying limit order books, preprint// https://arxiv.org/abs/1204.2736v1. 2012