Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ступенчатые решения квазинормальных форм одной распределенной краевой задачи

Научный руководитель – Глызин Сергей Дмитриевич

Костерин Дмитрий Сергеевич

Аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: kosterin.dim@mail.ru

Рассматривается система уравнений

$$\frac{du}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u,u) + F_3(u,u,u) + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t,x)dx, \tag{1}$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, A_0, A_1, D_0 – $n \times n$ матрицы, $F_2(*,*), F_3(*,*,*)$ – линейные по каждому аргументу вектор-функции, ε – малый положительный параметр.

Система (1) рассматривается с периодическим краевым условием

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{2}$$

В работе рассматривается случай, когда матрица A_0 имеет простое нулевое собственное значение, все остальные собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого решения краевой задачи её динамика описывается некоторой более простой краевой задачей, называемой квазинормальной формой.

В работе представлены квазинормальные формы задачи (1), (2) и приведены некоторые результаты о решениях этих квазинормальных форм.

Решение краевой задачи (1), (2) ищем в виде асимптотического ряда

$$u(t,x) = \varepsilon\xi(\tau,x)a + \varepsilon^2 u_{20}\xi^2(\tau,x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t.$$

Подставив его в (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим при ε^2 краевую задачу для определения неизвестной функции $\xi(\tau, x)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \lambda\xi + \delta\xi^2 + \gamma_0 M(\xi),\ \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \tag{3}$$

С помощью нормировок времени и функции ξ можно считать, что $\lambda = 1$, $\delta = -1$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Краевая задача (3) имеет однородные состояния равновесия $\xi_0 = 0$ и $\xi_1 = 1 + \gamma$. Состояние равновесия ξ_1 является асимптотически устойчивым, если $\gamma > -1$.*

Теорема 2. *Краевая задача (3) имеет однопараметрическое семейство кусочно-постоянных решений вида*

$$\xi(\tau, x) = \begin{cases} \rho, & x \in [0, \alpha), \\ 1 - \rho, & x \in [\alpha, 2\pi), \end{cases}$$

где ρ – решение уравнения

$$\rho^2 - \left(1 + \frac{\gamma(\alpha - \pi)}{\pi}\right)\rho - \frac{\gamma(2\pi - \alpha)}{2\pi} = 0.$$

Решения этого семейства являются неустойчивыми при любых α и γ.

В случае, если в (3) $\delta = 0$ и $\delta_1 \neq 0$, решение краевой задачи (1), (2) ищем в виде асимптотического ряда

$$u(t,x) = \varepsilon^{1/2}\xi(\tau,x) + \varepsilon u_{20}\xi^2(\tau,x) + \varepsilon^{3/2}\xi^3(\tau,x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t.$$

В этом случае квазинормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \lambda\xi + \delta_1\xi^3 + \gamma_0 M(\xi),\ \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \tag{4}$$

Можно считать, что $\lambda = 1$, $\delta = -1$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 3. *Краевая задача (4) имеет два ненулевых однородных состояния равновесия $\xi_1 = \sqrt{1+\gamma}$ и $\xi_2 = -\sqrt{1+\gamma}$, которые являются асимптотически устойчивыми при $\gamma > -\frac{2}{3}$.*

Теорема 4. *Краевая задача (4) имеет семейство кусочно-постоянных решений вида*

$$\xi(\tau,x) = \begin{cases} \rho_1, & x \in [0,\alpha), \\ \rho_2, & x \in [\alpha, 2\pi), \end{cases}$$

где ρ_1, ρ_2, α – решение алгебраической системы

$$\rho_j - \rho_j^3 + \frac{\gamma}{2\pi}[\rho_1\alpha + (2\pi - \alpha)\rho_2] = 0,\ j = 1,2.$$

Решение такого вида является устойчивым, если

$$\rho_j^2 > \frac{1}{3},\ j = 1,2,$$
$$2 - 3(\rho_1^2 + \rho_2^2) + \gamma < 0,$$
$$(1 - 3\rho_1^2)(1 - 3\rho_2^2) + \gamma - 3\left[\rho_1^2\gamma + \frac{\gamma\alpha}{2\pi}(\rho_2^2 - \rho_1^2)\right] > 0.$$